Stima uniforme per le forme quadratiche definite

Dimostriamo il teorema 3.21 a p.164 del libro di testo senza far uso delle proprietà degli autovalori.

Teorema 3.21. *Sia* $q(\underline{h}) = \underline{h}^T M \underline{h}$ *una f.q. in* $\mathbb{R}^n$. *Se* q *è definita positiva, allora esiste una costante* $c > 0$ *tale che*

$$q(\underline{h}) \geq c|\underline{h}|^2 \ \ \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Se q *è definita negativa, allora esiste una costante* $c' > 0$ *tale che*

$$q(h) \leq -c'|h|^2 \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$q(\underline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} h_i h_j.$$

Poiché q è una funzione continua, essa ammette massimo e minimo sull'insieme chiuso e limitato

$$\Sigma = \{\underline{h} \in \mathbb{R}^n : |\underline{h}| = 1\}$$

dunque esistono $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \Sigma$ tali che

$$c_1 = q(\underline{h}_1) \leq q(\underline{h}) \leq q(\underline{h}_2) = c_2 \ \ \forall \underline{h} \in \Sigma.$$

Supponiamo che q sia definita positiva. Allora $q(\underline{h}) > 0$ per ogni $\underline{h} \neq \underline{0}$, in particolare $c_1 = q(\underline{h}_1) > 0$ perché $\underline{h}_1 \neq \underline{0}$ in quanto $|\underline{h}_1| = 1$. Dunque

$$q(\underline{h}) \geq c_1 > 0 \ \forall \underline{h} \in \Sigma.$$

Sia ora $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ qualsiasi, $\underline{h} \neq \underline{0}$. Allora

$$\frac{h}{|\underline{h}|} \in \Sigma,$$

perciò

$$q\left(\frac{h}{|\underline{h}|}\right) \geq c_1 > 0$$

e poiché q è una funzione omogenea di grado 2,

$$q\left(\frac{h}{|\underline{h}|}\right) = \frac{1}{|\underline{h}|^2} q(\underline{h}) \geq c_1 > 0$$

ossia

$$q(\underline{h}) \geq c_1 |\underline{h}|^2 \quad \forall \ \underline{h} \in \mathbb{R}^n \text{ con } \underline{h} \neq \underline{0},$$

e ovviamente anche per $\underline{h} = \underline{0}$. Questo dimostra la prima parte. La seconda è analoga: se q è definita negativa, allora $q(\underline{h}) < 0$ per ogni $\underline{h} \neq \underline{0}$, in particolare $c_2 = q(\underline{h}_2) < 0$ perché $\underline{h}_2 \neq \underline{0}$ in quanto $|\underline{h}_2| = 1$. Dunque

$$q(\underline{h}) \leq c_2 < 0 \; \forall \underline{h} \in \Sigma$$

e per l'omogeneità si ricava ancora

$$q(\underline{h}) \leq c_2 |\underline{h}|^2 \quad \forall \, \underline{h} \in \mathbb{R}^n,$$

che è la tesi con $c' = -c_2$. $\square$