Equazione della corda vibrante fissata agli estremi

Una corda elastica fissata ai due estremi, pizzicata in modo da eseguire piccole oscillazioni rispetto all'equilibrio, soddisfa l'equazione differenziale

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

dove $u(x,t)$ rappresenta l'altezza al tempo t del punto della corda che a riposo si trova nel punto x, e c è una costante positiva con le dimensioni di una velocità. Se la corda è fissata agli estremi e sono note la sua configurazione iniziale $u_0(x)$ e la sua velocità iniziale (che supponiamo nulla, per semplicità) la $u(x,t)$ soddisferà il problema di Cauchy-Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{per } 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{per } 0 < x < L \\ u_t(x,0) = 0 & \text{per } 0 < x < L. \end{cases}$$

Affrontiamo il problema col *metodo di separazione delle variabili*, che consiste nel cercare anzitutto soluzioni di forma particolare, ossia appunto a variabili separate:

$$U(x,t) = X(x)T(t).$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ha:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}.$$

Questa uguaglianza dev'essere identicamente verificata per $0 < x < L, t > 0$. D'altro canto il primo membro è una funzione della sola x, il secondo membro è una funzione della sola t, quindi l'unica possibilità perché l'identità sussista è che ciascun membro sia costante. Si ha quindi, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \text{ per } 0 < x < L$$
$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \text{ per } t > 0. \tag{1}$$

Ricordiamo ora che devono valere le condizioni ai contorno $u(0,t) = u(L,t) = 0$ che si traducono in $X(0) = X(L) = 0$. Dunque l'equazione in X e quella in T assumono un ruolo asimmetrico, perché la prima (e solo la prima) è corredata di condizioni al contorno:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \text{ per } 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Con ciò abbiamo ottenuto un *problema agli autovalori* per l'operatore differenziale $\frac{d^2}{dx^2}$: si cercano numeri $\lambda \in \mathbb{R}$ (autovalori) e soluzioni $X(x)$ non identicamente nulle (autofunzioni) del problema (2). Si rifletta sul fatto che per ogni

λ possiamo scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale, dipendente da due costanti arbitrarie, ma non per ogni λ è possibile determinare le costanti di integrazione in modo da soddisfare le condizioni nulle agli estremi:

se $\lambda = 0, X(x) = c_1 x + c_2$ si annulla in $x = 0, x = L$ solo per $c_1 = c_2 = 0$;

se $\lambda > 0, X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$ si annulla in $x = 0, x = L$ solo per $c_1 = c_2 = 0$;

se $\lambda < 0, X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda} x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda} x\right)$ si annulla in $x = 0, x = L$ per $c_1 = 0$ e per qualsiasi c_2 purché sia $\sin\left(\sqrt{-\lambda} L\right) = 0$, cioè $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, con $n = 1, 2, 3, ...$

Abbiamo dunque ricavato *autovalori e autofunzioni del problema* (2):

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ per } n = 1, 2, 3, ...$$

(c_n costante arbitraria). Possiamo ora risolvere l'equazione (1) per questi valori di λ:

$$T''(t) = -\frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} T(t)$$
$$T_n(t) = \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

e in definitiva le soluzioni a variabili separate dell'equazione a derivate parziali e delle condizioni al contorno:

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right].$$

Nessuna di queste soluzioni in generale soddisferà anche la condizione iniziale, perché $u_n(x,0) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. L'idea allora è la seguente: essendo l'equazione differenziale lineare e omogenea, con condizioni agli estremi omogenee, ogni combinazione lineare finita delle u_n soddisferà ancora equazione e condizioni al contorno. Possiamo cercare una serie infinita di queste soluzioni che per un'opportuna scelta dei coefficienti c_n converga ed assuma anche la condizione iniziale. Scriviamo dunque

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right] \tag{3}$$

e imponiamo le condizioni iniziali:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u_0(x) \text{ per } 0 < x < L \tag{4}$$
$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \text{ per } 0 < x < L.$$

La seconda equazione dice che $\beta_n = 0$ per ogni n, quindi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \tag{5}$$

dove i coefficienti α_n vanno scelti in modo da rendere vera la (4), che assomiglia allo sviluppo di Fourier della funzione u_0. In realtà non è esattamente così, perché mancano i termini coseno. Procediamo a questo modo:

1. Definiamo la nuova funzione $\widetilde{u}_0 : [-L, L] \to \mathbb{R}$ ottenuta con una riflessione dispari di u_0, in altre parole:

$$\widetilde{u}_0(x) = \begin{cases} u(x) & \text{per } x \in [0, L] \\ -u(-x) & \text{per } x \in [-L, 0] \end{cases}$$

Per coerenza con le condizioni agli estremi, sarà $u_0(0) = 0 = u_0(L)$, quindi $\widetilde{u}_0$ è continua in $[-L, L]$; la sua $2L$ periodizzata è continua in $\mathbb{R}$ e regolare a tratti in $[-L, L]$ se u_0 era regolare a tratti in $[0, L]$.

2. Scriviamo lo sviluppo di Fourier di $\widetilde{u}_0$ in $[-L, L]$. Essendo una funzione dispari si avrà:

$$\widetilde{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ per } x \in [-L, L]$$

e in particolare

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ per } x \in [0, L],$$

con

$$b_n = \frac{4}{2L} \int_0^L \widetilde{u}_0(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy$$

In conclusione, la funzione (5) risolve l'equazione differenziale e le condizioni agli estremi e, scegliendo

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy$$

risolve anche le condizioni iniziali. Il tutto, naturalmente, facendo ipotesi sufficientemente "forti" sulla regolarità di u_0, che portino la serie (5) a convergere abbastanza velocemente da essere derivabile termine a termine il numero di volte necessario.

Si osservi che *la possibilità di risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet col metodo di separazione delle variabili imponendo una "qualsiasi" condizione iniziale* (eventualmente soddisfacente qualche ipotesi di regolarità) *si basa sul fatto che "qualsiasi" funzione (abbastanza regolare) sia sviluppabile in serie di Fourier.*

Un altro aspetto interessante di questo problema è che qualunque sia il dato iniziale $u_0(x)$, la vibrazione $u(x,t)$ risulterà sempre *periodica*, di periodo $T = L/(\pi c)$, e più precisamente risulterà data dalla sovrapposizione di (in generale infinite) *vibrazioni armoniche elementari*,

$$\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) \text{ per } k = 1, 2, 3, ...$$

Ognuna di queste ha periodo $T_k = L/(k\pi c)$ e frequenza $\nu_k = k\pi c/L$, in particolare: le frequenze delle armoniche sono tutte multiple intere della frequenza fondamentale $\nu_1 = \pi c/L$. Dal punto di vista musicale, la frequenza fondamentale è la nota più bassa, effettivamente percepita dall'orecchio, e le armoniche superiori arricchiscono il suono dandogli un "timbro" caratteristico.

Nella k-esima vibrazione armonica ci sono in tutto $k+1$ punti della corda equispaziati che non vibrano, i due estremi e $k-1$ *nodi* interni: sono i punti

$$x_{k,h} = \frac{h}{k}L \text{ per } h = 0, 1, 2, ..., k.$$

L'analisi di Fourier ci insegna che più regolare è u_0, più velocemente tenderanno a zero i coefficienti a_k. Questo significa che più regolare è la curva che descrive la condizione iniziale, minore sarà il numero di termini, nella serie che assegna u, necessari per approssimare accuratamente u stessa; in questo caso si dice che u "ha poche armoniche", o anche che "è povera di frequenze alte". In realtà può averne infinite, ma significa che queste sono di ampiezza trascurabile rispetto all'ampiezza della frequenza fondamentale.