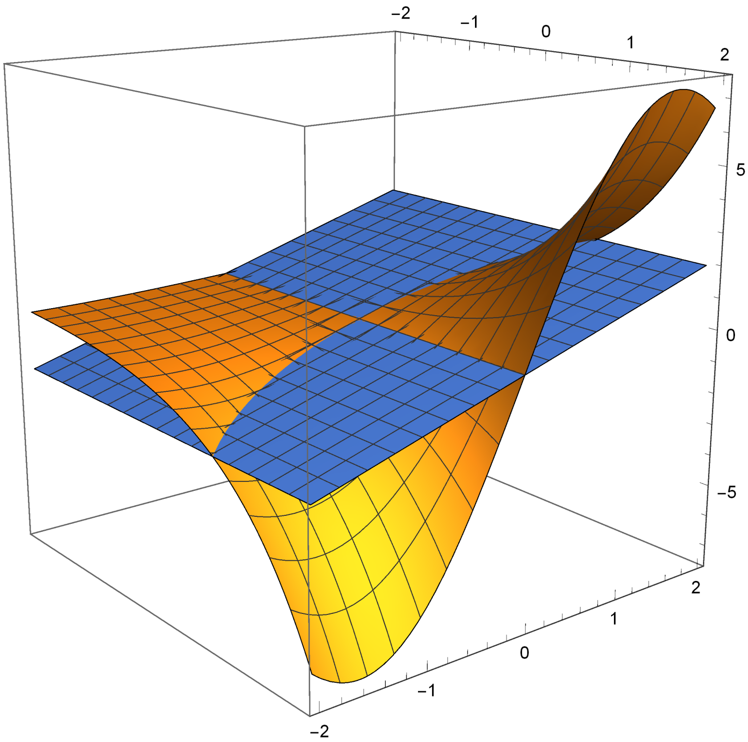
Derivabilità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Significato geometrico della differenziabilità

Se una funzione è differenziabile in un punto, nell' intorno di quel punto è linearizzabile, cioè è approssimata al prim' ordine dal piano tangente. Graficamente questo significa che se eseguiamo uno zoom nell' intorno di quel punto sul grafico della funzione e quello del piano tangente, più ci avviciniamo e più i due grafici diventano indistinguibili. La prossima funzione è differenziabile. Osserviamo il grafico della funzione e del suo piano tangente nell'origine, che è il piano z=y, sul quadrato [-2,2]x[-2,2].

In[4]:=
```
Plot3D[{Exp[x] Sin[y], y}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints → 50,
 BoxRatios -> {1, 1, 1}, ViewPoint -> {0.972, -3.047, 1.104}]
```

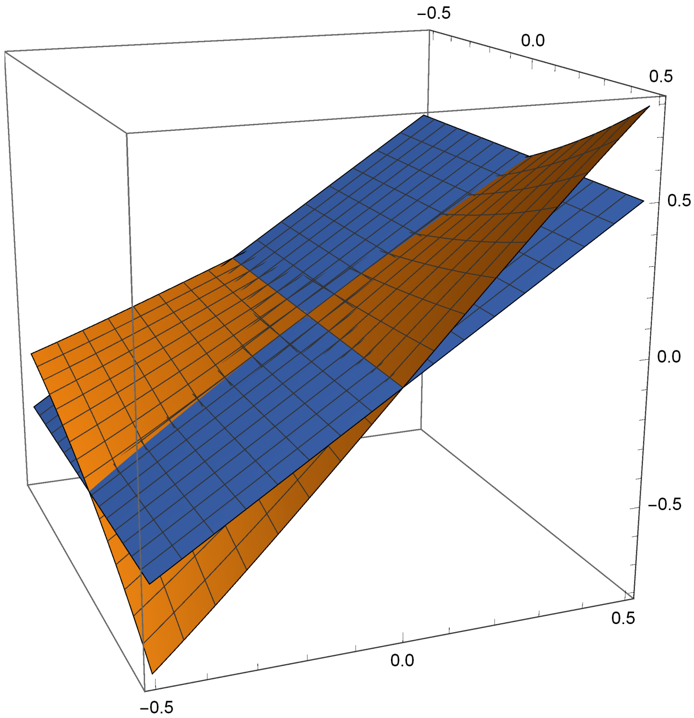
Out[4]=



Ora zoomiamo sull'origine, rappresentando gli stessi grafici sul quadrato [-0.5,0.5]x[-0.5,0.5]:

In[5]:=
```
Plot3D[{Exp[x] Sin[y], y}, {x, -1 / 2, 1 / 2}, {y, -1 / 2, 1 / 2}, PlotPoints → 50,
  BoxRatios -> {1, 1, 1}, ViewPoint -> {0.972, -3.047, 1.104}]
```

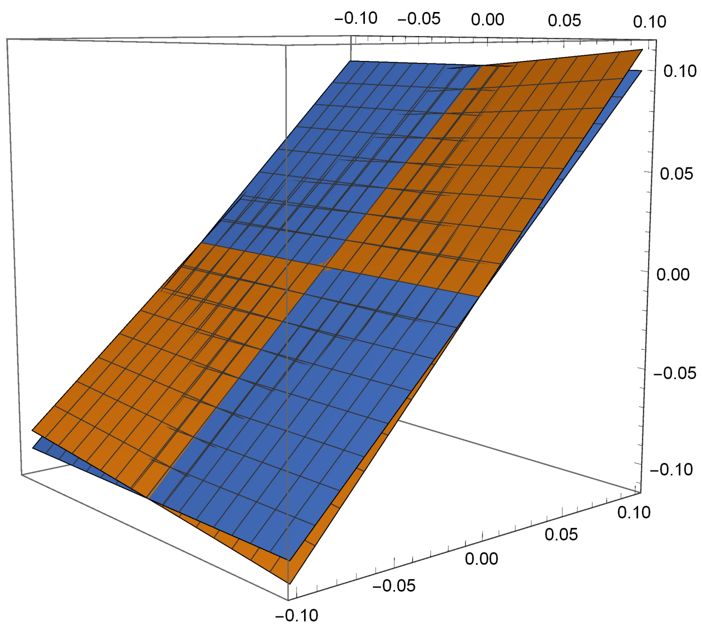
Out[5]=



Zoomiamo ancora, rappresentando gli stessi grafici sul quadrato [-0.1, 0.1] x[-0.1, 0.1]. Come si vede i grafici ora sono quasi indistinguibili.

In[6]:=
```
Plot3D[{Exp[x] Sin[y], y}, {x, -0.1, 0.1}, {y, -0.1, 0.1}, PlotPoints → 50,
  BoxRatios -> {1, 1, 1}, ViewPoint -> {0.972, -3.047, 1.104}]
```

Out[6]=

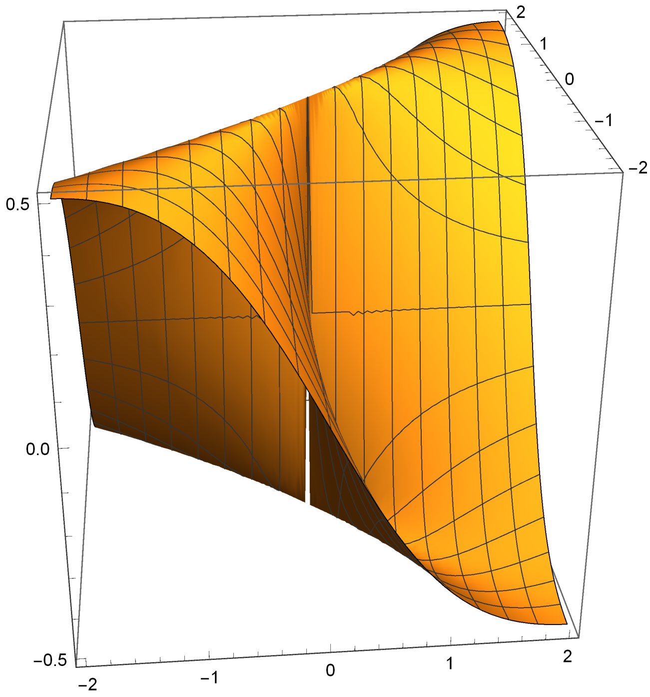


Esempi di funzioni non differenziabili

In[1]:=
```
Plot3D[x y / (x^2 + y^2), {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints → 50,
  BoxRatios -> {1, 1, 1}, ViewPoint -> {0.972, -3.047, 1.104}]
```

Questa funzione, discontinua e quindi certamente non differenziabile, se definita zero nell' origine diventa derivabile con derivate parziali nulle. Il suo "candidato piano tangente" è il piano z = 0, che evidentemente non approssima bene la funzione in un intorno dell' origine.

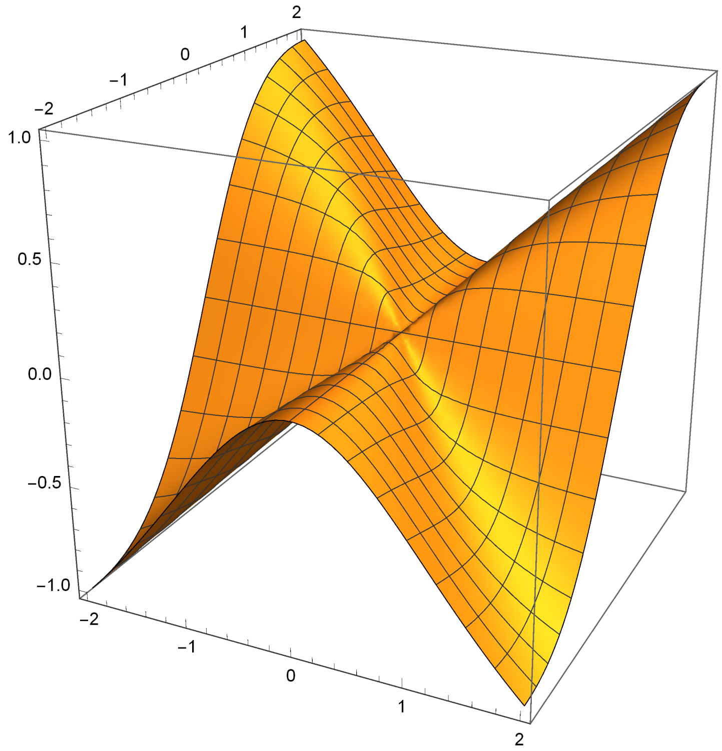
Out[1]=



In[2]:=
```
Plot3D[(x^2 y) / (x^2 + y^2), {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints → 50,
 BoxRatios -> {1, 1, 1}, ViewPoint -> {0.972, -3.047, 1.104}]
```

Questa funzione è continua e derivabile, con derivate parziali nulle nell’origine. Poiché è una funzione positivamente omogenea di grado 1 ma non è lineare, in base alla teoria certamente non è differenziabile nell’origine. Il suo "candidato piano tangente" è il piano z = 0, che evidentemente non approssima bene la funzione in un intorno dell' origine. Per renderci meglio conto di questa affermazione, eseguiamo uno zoom vicino all’origine.

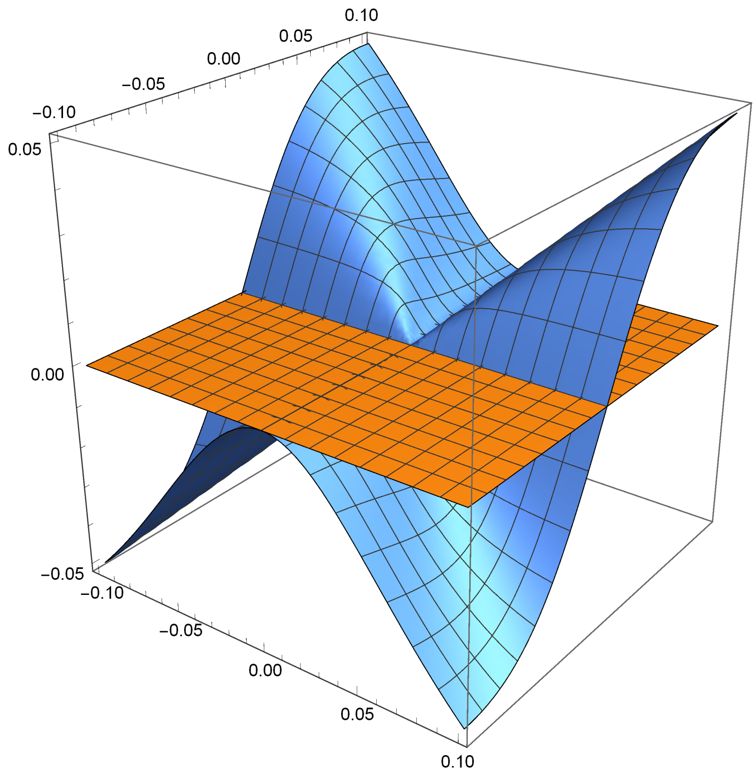
Out[2]=




```
In[7]:= Plot3D[{0, (x^2 y) / (x^2 + y^2)}, {x, -0.1, 0.1}, {y, -0.1, 0.1},
  PlotPoints → 50, BoxRatios -> {1, 1, 1}, ViewPoint -> {0.972, -3.047, 1.104}]
```

Come si vede, il candidato piano tangente non approssima affatto la funzione, neanche in un quadratino intorno all' origine di lato 0.1 :

Out[7]=




```
In[11]:= Plot3D[-Exp[-x^2 - y^2] Sin[Sqrt[x^2 + y^2]], {x, -2, 2},
  {y, -2, 2}, PlotPoints → 50, ViewPoint -> {0.972, -3.047, 1.104}]
```

Questa è una funzione radiale del tipo g (r) = -exp (-r^2) sin (r). Nell' origine g non ha derivata nulla, quindi f non è derivabile, ha un "punto conico" :

Out[11]=