Equazioni differenziali: l'emergere di un nuovo linguaggio della fisica

Note storiche sugli aspetti elementari della teoria delle equazioni differenziali ordinarie

Marco Bramanti, Marzo 2015

L'invenzione del calcolo infinitesimale da parte di Newton-Leibniz pone le basi per lo sviluppo della scienza moderna, dal punto di vista matematico. Aver identificato i concetti fisici di velocità istantanea e accelerazione istantanea con i concetti matematici di derivata prima e seconda è la premessa per la formulazione analitica delle leggi fisiche per mezzo di equazioni differenziali, cioè equazioni in cui l'incognita è una funzione, che compare nell'equazione stessa anche attraverso qualche sua derivata. Newton stesso, però, nei suoi "Principia" fece un uso moderato del nuovo linguaggio che aveva creato. Forse per timore di non essere accettato dal contesto scientifico se avesse vestito le sue idee fisiche con un linguaggio matematico totalmente nuovo, forse perché in lui stesso la "rivoluzione analitica" si faceva largo gradualmente, nella sua opera troviamo ancora un grande uso di ragionamenti basati sul linguaggio (Galileiano) della proporzionalità tra grandezze, su elaborate costruzioni geometriche, anche se in queste argomentazioni fanno ora la loro comparsa anche concetti "infinitesimali".

I primi studi sulle equazioni differenziali sono degli anni 1690 e si devono a Giacomo Bernoulli, Giovanni Bernoulli e Leibniz stesso:

"Negli Acta Eruditorum" del 1693 Huygens parla esplicitamente di equazioni differenziali, e Leibniz in un altro articolo dello stesso giornale e anno dice che le equazioni differenziali sono funzioni di parti del triangolo caratteristico. (...) Giacomo Bernoulli fu tra i primi a usare il calcolo nel risolvere analiticamente problemi di equazioni differenziali ordinarie. Nel maggio del 1690 pubblicò la sua soluzione del problema dell'isocrona, sebbene la soluzione analitica fosse già nota a Leibniz. Questo problema consiste nel trovare una curva lungo cui un pendolo impiega lo stesso tempo per fare un'oscillazione completa, indipendentemente dall'ampiezza dell'arco. (...) La soluzione è la cicloide. Nello stesso lavoro del 1690 Giacomo Bernoulli pose il problema di trovare la curva assunta da una corda flessibile e insestensibile appesa liberamente tra due punti fissi, la curva che Leibniz chiamò caternaria. (...) Negli Acta del giugno 1691, Leibniz, Huygens e Giovanni Bernoulli pubblicarono soluzioni indipendenti". [Klein, pp.471 sgg.]

Gli inizi degli studi sulle equazioni differenziali ordinarie sono mossi non tanto dalla ricerca di metodi generali per la soluzioni di ampie classi di equazioni, quanto da problemi specifici, di interesse geometrico o fisico. Tra questi, oltre ai problemi già citati dell'isocrona e della catenaria, ricordiamo il problema della trattrice (Giacomo Bernoulli, 1691), della brachistocrona, posto nel 1696 da Giovanni Bernoulli (trovare la curva congiungente due punti assegnati su uno stesso piano verticale, lungo la quale un corpo scivola senza attrito nel tempo minimo); il problema di determinare le traiettorie ortogonali a una famiglia assegnata di curve (Giovanni Bernoulli, 1698).

Notiamo per inciso che il problema della brachistocrona è considerato anche storicamente il primo problema di *calcolo delle variazioni*, ossia un problema di massimo o minimo in cui si cerca la curva o funzione che rende massima o minima una certa quantità.

Quanto ai metodi generali di soluzione, validi per classi di equazioni differenziali ordinarie:

Leibniz scopre implicitamente il metodo di separazione delle variabili per le equazioni del prim'ordine (a variabili separabili) e ne parla in una lettera a Huygens del 1691 [Klein p.474] Giovanni Bernoulli tratta esplicitamente questa procedura in una lettera a Leibniz del 1694.

Leibniz nel 1694 mostra come ridurre alle quadrature le equazioni lineari del prim'ordine.

Tutti i vari metodi che sono oggi noti per risolvere esplicitamente particolari equazioni differenziali del prim'ordine (come le "equazioni di Bernoulli") vengono scoperti prima del 1700.

Giovanni Bernoulli risolve il problema di determinare il moto di un proiettile in un mezzo resistente, quando l'attrito è proporzionale a una qualsiasi potenza della velocità.

Quanto alle equazioni differenziali del second'ordine, l'equazione dell'oscillatore armonico è trattata da Giovanni Bernoulli nel 1727. Nel 1728 Eulero si occupò dell'equazione (del second'ordine) di un pendolo con attrito; trattò anche casi particolari di equazioni del second'ordine che si potevano ridurre a equazioni del primo. E' in questo lavoro che fanno la loro prima comparsa le funzioni esponenziali. [Klein p.479].

Lo studio delle vibrazioni forzate e del fenomeno della risonanza sono contenuti in un articolo di Eulero del 1739.

Sempre nel 1739 Eulero ottiene il metodo per risolvere le equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine qualsiasi mediante esponenziali (reali o complessi). [Klein p.485].

La forma analitica della seconda legge di Newton come sistema di tre equazioni differenziali del second'ordine si deve a Eulero, 1750.

"L'opera più famosa di Lagrange, la Meccanica Analitica (1788, 2^ ediz. postuma nel 1853) estese, formalizzò e coronò il lavoro di Newton sulla meccanica." [Klein p.493]

Laplace invece negli anni 1799-1825 pubblicò i 5 volumi della sua Meccanica Celeste, che incorpora scoperte e risultati di Newton, Clairaut, d'Alembert, Eulero, Lagrange, e Laplace stesso. [Klein p.495].

L'applicazione delle equazioni differenziali ai problemi fisici divenne poi ancora più impetuoso con lo studio delle *equazioni differenziali alle derivate parziali*, che intervengono tipicamente nello studio della fisica dei mezzi continui (fenomeni di diffusione del calore, vibrazioni o equilibrio di corde o membrane, ecc.), che si iniziò a studiare intorno al 1750 (con il problema della corda vibrante) e avrebbe avuto un grande sviluppo a partire dal 19° secolo, in particolare a partire dal lavoro di Fourier, che arrivò a scrivere:

"L'analisi matematica è tanto estesa quanto la natura stessa" (citato in [Klein, p.502]).

Riferimenti:

Morris Klein: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press. Vol. 2, Chap. 21.

John E. Sasser. History of ordinary differential equations. The first hundred years. Proceedings of the Midwest Mathematics History Society. 1992. Scaricabile al link:

http://www2.fiu.edu/~yuasun/ODE_History.pdf