Calcolo differenziale per funzioni $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (derivate prime) Schema delle relazioni che valgono e non valgono tra le varie proprietà di regolarità di una funzione

Sia $f: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, A aperto. Allora:

- f differenziabile in $\underline{x}_0\in A \Longrightarrow f$ continua e derivabile in $\underline{x}_0$ (Proposizione 3.2)
- f derivabile in un intorno di $\underline{x}_0\in A$ e le derivate parziali sono continue in $\underline{x}_0 \Longrightarrow f$ differenziabile in $\underline{x}_0$ (Teorema 3.8, (i))
- $f\in C^1(A)\Longrightarrow f$ differenziabile in ogni punto di A. (Teorema 3.8, (ii))
- f differenziabile in $\underline{x}_0\in A\Longrightarrow f$ possiede tutte le derivate direzionali in $\underline{x}_0$, che si possono calcolare mediante la formula del gradiente (Teorema 3.9).

Invece:

- f derivabile$\not\Rightarrow f$ continua, contresempio:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

  Infatti esistono $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ (la funzione è identicamente nulla sugli assi) ma f è discontinua nell'origine (f è omogenea di grado 0 e non costante).

- f continua e derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali$\not\Rightarrow f$ differenziabile, contresempio:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

  Infatti f è continua in $(0,0)$ perché omogenea di grado 1 e continua fuori dall'origine; esistono $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ (la funzione è identicamente nulla sugli assi) ma f non è differenziabile nell'origine, in quanto il quoziente

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

  dà una funzione omogenea di grado 0, che perciò non ha limite per $(x,y)\to(0,0)$, mentre per avere differenziabilità tale limite dovrebbe esistere ed essere nullo. Le derivate direzionali esistono:

$$\begin{aligned}g(t)&=f(t\cos\theta,t\sin\theta)=t\cos^2\theta\sin\theta\\ g'(t)&=\cos^2\theta\sin\theta\end{aligned}$$

perciò per ogni $\underline{v}$= $(\cos\theta, \sin\theta)$ esiste

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = \cos^2\theta \sin\theta.$$

- f continua e derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali$\nRightarrow$validità della formula del gradiente. Stesso esempio precedente:

$$\begin{aligned} \nabla f(0,0) &= (0,0) \\ D_{\underline{v}} f(0,0) &= \cos^2\theta \sin\theta \\ \nabla f(0,0) \cdot \underline{v} &= (0,0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = 0 \neq \cos^2\theta \sin\theta \end{aligned}$$

per ogni $\theta \neq k\frac{\pi}{2}$. La formula del gradiente viene a cadere per quasi tutti i versori.

- f differenziabile in $\underline{x}_0 \in A \nRightarrow f$ derivabile in un intorno di $\underline{x}_0$. (Quindi la condizione sufficiente per la differenziabilità non è necessaria). Contresempio:

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x}y.$$

La funzione è continua in $\mathbb{R}^2$ e positivamente omogenea di grado $\frac{4}{3} > 1$, quindi differenziabile (e derivabile) nell'origine, con $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Però non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ per ogni $y_0 \neq 0$, perciò in ogni intorno dell'origine ci sono punti in cui la funzione non è derivabile.

- f differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$ e derivabile in un intorno di $\underline{x}_0 \nRightarrow$la continuità delle derivate parziali in $(0,0)$. (Quindi la condizione sufficiente per la differenziabilità non è necessaria). Contresempio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione è radiale, $f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ con

$$g(\rho) = \begin{cases} \rho^2 \sin\frac{1}{\rho} & \rho \neq 0 \\ 0 & \rho = 0 \end{cases}$$

che è continua fuori dall'origine, e

$$g(\rho) \to 0 \text{ per } \rho \to 0,$$

quindi f è anche continua in $(0,0)$. Inoltre esiste $g'(0) = 0$, in quanto

$$g'(0) = \lim_{\rho\to 0} \frac{g(\rho) - g(0)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho \sin\frac{1}{\rho} = 0,$$

perciò f è differenziabile in $(0,0)$, con

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

Fuori dall'origine f è C^1, quindi differenziabile, derivabile, continua. Mostriamo che le derivate parziali non sono continue nell'origine. Calcoliamo, fuori dall'origine,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \\ &= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).\end{aligned}$$

Ora, per $(x,y)\to(0,0)$ si ha

$$\left|2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \le 2\left|x\right| \to 0,$$

mentre non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

(in polari, si avrebbe

$$\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \cos\theta\cdot\cos\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

che non ha limite per $\rho\to 0$ e $\cos\theta\neq 0$). Pertanto

$$\text{non esiste } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),$$

e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ è discontinua in $(0,0)$. (Lo stesso vale per $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, per simmetria, ma non è importante verificarlo).