

Il "metodo di somiglianza" per la ricerca di una soluzione particolare delle equazioni differenziali lineari del second'ordine non omogenee:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (*)$$

(con a, b, c costanti, $a \neq 0$)

Forma di $f(x)$	Forma in cui si cerca $\bar{y}(x)$	Eventuali eccezioni e osservazioni
CASO 1		
polinomio di grado n	polinomio di grado n	Se nella (*) $c = 0$, cercare un polinomio di grado $n + 1$; se $c = b = 0$, cercare un polinomio di grado $n + 2$.
ESEMPI CASO 1		
$y'' + 2y = x^3 + 2$	$\bar{y}(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$	
$y'' - 3y' = 2x + 1$	$\bar{y}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$	
CASO 2		
esponenziale $Ae^{\lambda x}$	esponenziale $ce^{\lambda x}$ (lo stesso λ , e c da determinarsi)	Se non c'è soluzione di questo tipo (ciò accade perché $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, ossia perché $e^{\lambda x}$ è soluzione dell'eq. diff. omogenea), cercare $\bar{y}(x) = cxe^{\lambda x}$; se nemmeno questo tipo di soluzione esiste, cercare $\bar{y}(x) = cx^2e^{\lambda x}$
ESEMPI CASO 2		
$y'' + 2y' + 3y = 2e^{-3x}$	$\bar{y}(x) = ce^{-3x}$	
$y'' + 2y' - 3y = 3e^x$	$\bar{y}(x) = cxe^x$	
(Spiegazione 2° es.: $\lambda = 1$ è soluzione dell'eq. caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$; equivalentemente: e^x è soluzione dell'eq. diff. omogenea $y'' + 2y' - 3y = 0$; perciò occorre moltiplicare per x)		
CASO 3		
$A\cos\omega x + B\sin\omega x$	$c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ (lo stesso ω , e c_1, c_2 da determinarsi)	Notare che anche se f ha uno solo dei due addendi (seno o coseno), in generale la soluzione li ha entrambi. Se $b = 0$ può accadere che $c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ sia soluzione dell'omogenea: in tal caso, cercare soluzione $x(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x)$.
ESEMPIO CASO 3		
$y'' + 2y' - y = 3\sin 2x$	$\bar{y}(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$	

Forma di $f(x)$

Forma in cui si cerca $\bar{y}(x)$

Eventuali eccezioni e osservazioni

CASO 4

$e^{\lambda x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ $e^{\lambda x}(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x)$
(gli stessi ω, λ e
 c_1, c_2 da determinarsi)

Se $z = \lambda + i\omega$ è soluzione di $az^2 + bz + c = 0$, sostituire $e^{\lambda x}$ con $xe^{\lambda x}$.
Notare che anche se f ha uno solo dei due addendi (seno o coseno),
in generale la soluzione li ha entrambi.

ESEMPI CASO 4

$y'' + 2y = 3e^{-x}\sin 2x$ $\bar{y}(x) = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$

$y'' - 4y' + 5y = 3e^{2x}\cos x$ $\bar{y}(x) = xe^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$

(Spiegazione 2° es.: $z = 2 + i$ è soluzione dell'eq. caratteristica $z^2 - 4z + 5 = 0$, ossia $e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x$ sono soluzioni dell'eq. omogenea $y'' - 4y' + 5y = 0$, perciò si introduce il fattore x).

(Nel caso 4 può essere più comodo effettuare i calcoli utilizzando i numeri complessi, come illustrato a lezione.

Per sinteticità, qui non si riporta l'illustrazione di quel metodo).

CASO 5

$e^{\lambda x}p(x)$, dove $p(x)$ è
un polinomio di grado n

$e^{\lambda x}q(x)$, con lo stesso λ , e
 $q(x)$ polinomio di grado n , da
determinarsi

Se λ è soluzione dell'eq. caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, cercare una
soluzione $y(x) = e^{\lambda x} \cdot (\text{polinomio di grado } n + 1)$

ESEMPI CASO 5

$y'' + 2y' - y = e^{3x}(x+2)$ $\bar{y}(x) = e^{3x}(ax+b)$

$y'' - y = e^x(x+2)$ $\bar{y}(x) = e^x(ax^2+bx+c)$

(Spiegazione 2° esempio: $\lambda = 1$ è soluzione dell'eq. caratteristica $\lambda^2 - \lambda = 0$, ossia e^x è soluzione dell'equazione omogenea $y'' - y = 0$;
perciò il polinomio che compare in \bar{y} si alza di grado).

OSSERVAZIONE. QUANDO IL TERMINE NOTO E' SOMMA DI DUE FUNZIONI DEI TIPI PRECEDENTI

Se il termine noto è del tipo $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, con f_1, f_2 dei tipi descritti in precedenza, è sufficiente cercare (separatamente):

una soluzione particolare y_1 dell'equazione $Ly = f_1$; una soluzione particolare y_2 dell'equazione $Ly = f_2$;

a questo punto (per la linearità dell'equazione differenziale), la funzione $y_1 + y_2$ sarà una soluzione particolare di $Ly = f_1 + f_2$.

Esempio:

$y'' + 2y = 3e^{-x} + x^2 + 1$

Si cerca una soluzione $y_1 = c_1e^{-x}$ dell'equazione $y'' + 2y = 3e^{-x}$; si cerca una soluzione $y_2 = ax^2 + bx + c$ dell'equazione $y'' + 2y = x^2 + 1$;
la funzione $y_1 + y_2$ sarà allora una soluzione particolare dell'equazione di partenza.