

Test di Autovalutazione sui prerequisiti per il Corso di Analisi Matematica B

Perché questo test? I "prerequisiti per Analisi 2" non dovrebbero coincidere semplicemente con il corso di Analisi 1? Difatti è così. Ma purtroppo, succede non di rado che uno studente affronti il corso di Analisi 2 avendo superato l'esame di Analisi 1 molto tempo addietro, o avendolo superato in modo non proprio brillante, o non avendolo ancora superato...

Può essere utile allora puntualizzare esplicitamente, a questo punto, quali sono i contenuti di Analisi 1 o di matematica elementare che saranno maggiormente coinvolti nello studio di Analisi 2 (Con ciò naturalmente non si vuole affermare che tutto quanto non compare in questo test sia inutile!).

Lo studente che incontrasse difficoltà nello svolgimento degli esercizi proposti in questo test è invitato a rivedere a fondo gli argomenti corrispondenti, in modo da affrontare il corso munito degli strumenti matematici di base adeguati.

A. Calcolo di derivate (*servirà nel calcolo di derivate parziali*)

1. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

a.

$$f(x) = e^{\cos^2 x}$$

b.

$$f(x) = \frac{ax}{x^2 + a^2} \quad (a \text{ costante})$$

B. Calcolo di integrali indefiniti (*serviranno nella risoluzione di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine, oltre che nel calcolo di integrali definiti*)

3.

$$\int \frac{dy}{y(1+y)}$$

4.

$$\int x^2 e^{-x} dx$$

C. Calcolo di integrali definiti (*serviranno nel calcolo di integrali doppi e tripli*).

5.

$$\int_0^\pi (R^4 \sin^3 \varphi + R^6 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi) d\varphi$$

(R è costante).

6.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

D. Grafici di funzioni (servono, ad esempio, a rappresentare le soluzioni di equazioni differenziali)

7. Tracciare un grafico qualitativamente corretto delle seguenti funzioni:

a.

$$f(x) = e^{-2x} \sin x$$

b.

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{3e^x + 1}$$

E. Calcolo coi numeri complessi (servirà nella risoluzione di equazioni differenziali del second'ordine)

8.

a. Riscrivere in forma algebrica ($a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$) il numero complesso:

$$z = \frac{1}{2(2i - 1)^2 - (2i - 1) - 1}$$

b. Riscrivere in forma algebrica il numero complesso:

$$z \cdot e^{-1+2i}$$

(dove z è il numero calcolato al punto a).

F. Matematica elementare

9. Risoluzione di sistemi di equazioni algebriche (non necessariamente lineari) (servirà nella ricerca dei punti critici di una funzione di due variabili).

Determinare *tutte* le soluzioni del seguente sistema. Quanti punti del piano rappresentano tali soluzioni?

$$\begin{cases} y(x^2 + 2x - 3) = 0 \\ \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

(ossia: non basta "vedere a occhio" qualche soluzione: occorre procedere sistematicamente in modo da essere certi di averle trovate *tutte*)

10. Calcolo con esponenziali e logaritmi (servirà, ad esempio, nel risolvere equazioni differenziali a variabili separabili)

a. Ricavare y in funzione di x nella seguente equazione:

$$\log\left(\frac{y}{y+1}\right) = x + 3.$$

b. Risolvere rispetto ad x l'equazione:

$$e^{2x} - 2ae^x - 1 = 0 \quad (\text{con } a \text{ parametro reale fissato})$$

(Suggerimento: prima risolverla come equazione di secondo grado nell'incognita $t = e^x$, poi ricavare x).