Test di Autovalutazione
sui prerequisiti per il Corso di Analisi Matematica B
Soluzioni

A. Calcolo di derivate

1. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

a.

$$f(x) = e^{\cos^2 x}$$

$f'(x) = -2\cos x \sin x e^{\cos^2 x}$

b.

$$f(x) = \frac{ax}{x^2 + a^2} \text{ (} a \text{ costante)}$$

$f'(x) = \frac{a(x^2+a^2)-2x(ax)}{(x^2+a^2)^2} = \frac{a(a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^2}.$

B. Calcolo di integrali indefiniti

3.

$$\int \frac{dy}{y(1+y)}$$

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy = \log\left|\frac{y}{1+y}\right| + c$$

4.

$$\int x^2 e^{-x} dx$$

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx =$$

$$= -x^2 e^{-x} + \left\{-2x e^{-x} + \int 2e^{-x} dx\right\} =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

C. Calcolo di integrali definiti

5.

$$\int_0^{\pi} \left(R^4 \sin^3\varphi + R^6 \cos^2\varphi \sin^3\varphi\right) d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} \left(R^4 \sin^3\varphi\ + R^6 \cos^2\varphi \sin^3\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[R^4 \sin\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right) + R^6 \sin\varphi\left(\cos^2\varphi - \cos^4\varphi\right)\right] d\varphi =$$

$$= \left[R^4\left(-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right) + R^6\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3} + \frac{\cos^5\varphi}{5}\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[2R^4\left(1-\frac{1}{3}\right) + 2R^6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right] = \frac{4}{3}R^4 + \frac{4}{15}R^6.$$

6.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \left[x = \sin t;\, dx = \cos t\, dt;\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\, \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

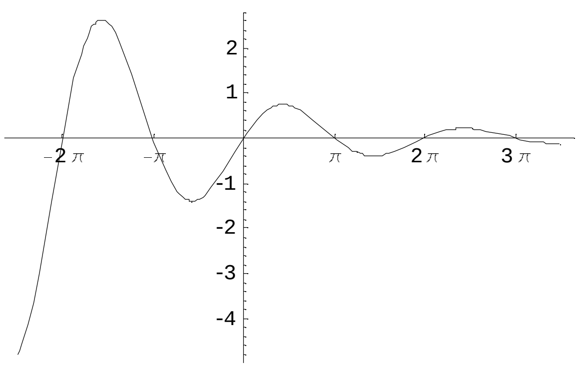
$$= \left[\frac{\cos t \sin t + t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

D. Grafici di funzioni

7. Tracciare un grafico qualitativamente corretto delle seguenti funzioni:

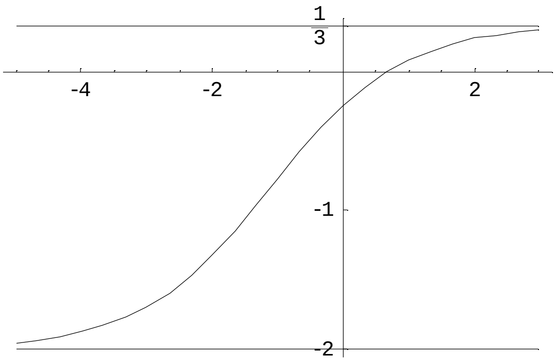
a.

$$f(x) = e^{-2x} \sin x$$



b.

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{3e^x + 1}$$



E. Calcolo coi numeri complessi
8.
a. Riscrivere in forma algebrica ($a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$) il numero complesso:

$$z = \frac{1}{2(2i-1)^2 - (2i-1) - 1}$$

b. Riscrivere in forma algebrica il numero complesso:

$$z \cdot e^{-1+2i}$$

(dove z è il numero calcolato al punto a).
a.

$$z = \frac{1}{2(2i-1)^2 - (2i-1) - 1} = \frac{1}{2(-5-4i) - 2i} = \frac{1}{-10-10i} =$$

$$= -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{1+i}\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\frac{1}{20} - \frac{1}{20}i$$

b.

$$z \cdot e^{-1+2i} = \left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{20}i\right)e^{-1}(\cos 2 + i\sin 2) =$$

$$= -\frac{1}{20e}(1+i)(\cos 2 + i\sin 2) =$$

$$= -\frac{1}{20e}(\cos 2 - \sin 2) - \frac{i}{20e}(\cos 2 + \sin 2).$$

F. Matematica elementare

9. Risoluzione di sistemi di equazioni algebriche (non necessariamente lineari)

Determinare *tutte* le soluzioni del seguente sistema. Quanti punti del piano rappresentano tali soluzioni?

$$\begin{cases} y(x^2+2x-3)=0 \\ \frac{x^3}{3}+x^2-3x+2y=0 \end{cases}$$

$$y=0 \Rightarrow x\left(\frac{x^2}{3}+x-3\right)=0 \Rightarrow x=0 \text{ oppure}$$

$$x^2+3x-9=0,\ x=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

$$x=1 \Rightarrow y=\frac{5}{6};\ x=-3 \Rightarrow y=-\frac{9}{2}.$$

Soluzioni:

$$(0,0),\ \left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2},0\right),\ \left(\frac{-3-3\sqrt{5}}{2},0\right),\ \left(1,\frac{5}{6}\right),\ \left(-3,-\frac{9}{2}\right).$$

10. Calcolo con esponenziali e logaritmi

a. Ricavare y in funzione di x nella seguente equazione:

$$\log\left(\frac{y}{y+1}\right)=x+3.$$

$$\frac{y}{y+1}=e^x e^3$$

$$y=\frac{e^x e^3}{1-e^x e^3}.$$

b. Risolvere rispetto ad x l'equazione:

$$e^{2x}-2ae^x-1=0 \ \text{ (con } a \text{ parametro reale fissato)}$$

(Suggerimento: prima risolverla come equazione di secondo grado nell'incognita $t=e^x$, poi ricavare x).

$$e^x=a\pm\sqrt{a^2+1}$$

solo la soluzione col segno $+$ è accettabile, perché positiva; dunque:

$$x=\log\left(a+\sqrt{a^2+1}\right).$$