| Esame di Metodi Analitici per le EDP<br>Primo appello. Giugno 2025<br>Svolgimento Tema 1<br>A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti |
|---|

| | Punti |
|---|---|
| Dom 1 | |
| Dom 2 | |
| Dom 3 | |
| Esercizio | |
| Tot. | |

**Rispondere alle seguenti domande:**

**1. (9 punti)** Enunciare e dimostrare le identità di Green. Quindi enunciare e dimostrare (mediante le identità di Green) i risultati di unicità che si stabiliscono per vari problemi al contorno per l'*equazione di Poisson*.

**2. (8 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 & \text{per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

*Suggerimento:* è utile la formula per la trasformata di Fourier della Gaussiana $n$-dimensionale. Posto

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, e^{-2\pi i x \xi} dx$$

si ha, per $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}.$$

**3**. **(9 punti)** Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per *problema variazionale astratto*. Quindi, nel caso particolare di una forma bilineare *simmetrica*, dimostrare, sotto ulteriori opportune ipotesi, il teorema di buona posizione del problema.

**Svolgere il seguente esercizio:**

**4. (7 punti)** Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione (non omogenea) della corda vibrante illimitata, riscrivendo la soluzione nella forma il più possibile semplificata:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos x \cos t \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = x|x| \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Precisare quindi che regolarità ha la soluzione.

Applicando la formula di D'Alembert e la formula per l'equazione non omogenea

$$u(x,t)=\frac{g(x+ct)+g(x-ct)}{2}+\int_0^t\left(\frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}f(y,s)\,dy\right)ds$$

con $c=1, g(x)=x|x|$ , $f(x,t)=\cos x\cos t$ si ha:

$$u(x,t)=\frac{(x+t)|x+t|+(x-t)|x-t|}{2}+\int_0^t\left(\frac{\cos s}{2}\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)}\cos y dy\right)ds.$$

$$\int_0^t\left(\frac{\cos s}{2}\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)}\cos y dy\right)ds=\int_0^t\left(\frac{\cos s}{2}\left[\sin(x+(t-s))-\sin(x-(t-s))\right]\right)ds$$

poiché $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}
&=\int_0^t\cos s\cos x\sin(t-s)\,ds\\
&=\frac{\cos x}{2}\int_0^t\left[\sin t-\sin(2s-t)\right]ds\\
&=\frac{\cos x}{2}\left(t\sin t+\left[\frac{1}{2}\cos(2s-t)\right]_0^t\right)\\
&=\frac{\cos x}{2}(t\sin t+0)=\frac{1}{2}t\sin t\cos x.
\end{aligned}$$

In definitiva,

$$u(x,t)=\frac{(x+t)|x+t|+(x-t)|x-t|}{2}+\frac{1}{2}t\sin t\cos x$$

Il secondo addendo è infinitamente derivabile, mentre il primo è solo $C^1$, così come la funzione $g(x)=x|x|$, infatti $g'(x)=2|x|$ è continua ma non derivabile a sua volta. Pertanto la soluzione è $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ ma non $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

| Esame di Metodi Analitici per le EDP<br>Primo appello. Giugno 2025<br>Svolgimento Tema 2<br>A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti |
|---|

| | Punti |
|---|---|
| Dom 1 | |
| Dom 2 | |
| Dom 3 | |
| Esercizio | |
| Tot. | |

**Rispondere alle seguenti domande:**

**1. (9 punti)** Enunciare con precisione e dimostrare il teorema di risolubilità classica per il *problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sulla sfera* $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ mediante la *formula integrale di Poisson*:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{f(z)}{|x - z|^n} dS(z).$$

**2. (9 punti)** Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con $v$ costante reale, $f$ e $g$ assegnate.

*a.* Si definisca il concetto di *soluzione classica* e *soluzione debole* dell'equazione e si dimostri che una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

*b.* Si dimostri l'esistenza di una soluzione debole nel caso $f = 0$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

**3. (8 punti)** Si consideri il *problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata*:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy. \tag{1}$$

*a.* Dimostrare sotto quali ipotesi su $g$ e $h$ la $u$ assegnata da (1) è una soluzione classica del problema.

*b.* Dimostrare una stima di stabilità per la soluzione del problema.

**Svolgere il seguente esercizio:**

**4. (7 punti)** Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sulla sbarra finita, dopo aver previsto in base alla teoria in che senso sarà assunto il dato iniziale:

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0 & \text{per } x \in (0,3)\,, t > 0 \\ u\,(0,t) = u\,(3,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u\,(x,0) = (x-3)\sin x. \end{cases}$$

Si raccomanda di scrivere la soluzione nella forma il più possibile semplificata.

Poiché il dato iniziale $f\,(x) = (x-3)\sin x$ è continuo, regolare e rispetta la condizione di raccordo $f\,(0) = f\,(3) = 0$, il dato iniziale sarà assunto come limite uniforme, oltre che $L^2$.

La soluzione è data da:

$$\begin{aligned} u\,(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &(L = 3, D = 9) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \\ &\text{con} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L (x-3)\sin x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{3}\int_0^3 (x-3)\sin x \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^3 (x-3)\left\{\cos\left[\left(\frac{n\pi}{3}-1\right)x\right] - \cos\left[\left(\frac{n\pi}{3}+1\right)x\right]\right\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\left\{\left[(x-3)\left\{\frac{\sin\left[\left(\frac{n\pi}{3}-1\right)x\right]}{\left(\frac{n\pi}{3}-1\right)} - \frac{\sin\left[\left(\frac{n\pi}{3}+1\right)x\right]}{\left(\frac{n\pi}{3}+1\right)}\right\}\right]_0^3 \right. \\ &\left. - \int_0^3 \left\{\frac{\sin\left[\left(\frac{n\pi}{3}-1\right)x\right]}{\left(\frac{n\pi}{3}-1\right)} - \frac{\sin\left[\left(\frac{n\pi}{3}+1\right)x\right]}{\left(\frac{n\pi}{3}+1\right)}\right\} dx\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{\cos\left[\left(\frac{n\pi}{3}-1\right)x\right]}{\left(\frac{n\pi}{3}-1\right)^2} - \frac{\cos\left[\left(\frac{n\pi}{3}+1\right)x\right]}{\left(\frac{n\pi}{3}+1\right)^2}\right]_0^3 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\cos\left(n\pi-3\right)-1}{\left(\frac{n\pi}{3}-1\right)^2}-\frac{\cos\left(n\pi+3\right)-1}{\left(\frac{n\pi}{3}+1\right)^2}\right]$$

$$= \frac{\cos\left(n\pi+3\right)-1}{3}\left[\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{3}-1\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{3}+1\right)^2}\right]$$

$$= \frac{\cos\left(n\pi+3\right)-1}{3}\cdot\frac{\frac{4n\pi}{3}}{\left(\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2-1\right)^2} = \frac{4n\pi\left[\cos\left(n\pi+3\right)-1\right]}{9\left(\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2-1\right)^2}$$

$$u\left(x,t\right) = \frac{4\pi}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left[\cos\left(n\pi+3\right)-1\right]}{\left(\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2-1\right)^2}e^{-n^2\pi^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

$$= 36\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left[\cos 3\cos\left(n\pi\right)-1\right]}{\left(n^2\pi^2-9\right)^2}e^{-n^2\pi^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

| Esame di Metodi Analitici per le EDP<br>Primo appello. Giugno 2025<br>Svolgimento Tema 3<br>A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti |
|---|

| | Punti |
|---|---|
| Dom 1 | |
| Dom 2 | |
| Dom 3 | |
| Esercizio | |
| Tot. | |

**Rispondere alle seguenti domande:**

**1. (8 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{per } x \in (0, L). \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

**2. (9 punti)** Scrivere il *problema agli autovalori per il laplaciano* su un dominio limitato e lipschitziano $\Omega$ di $\mathbb{R}^n$, con condizione di Dirichlet nulla al bordo, e dimostrare le proprietà studiate che riguardano il segno degli autovalori e l'ortogonalità delle autofunzioni. Spiegare poi come interviene questo problema agli autovalori nella risoluzione di altri problemi per l'equazione del calore o delle onde.

**3**. **(9 punti)** Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti tra una funzione $H^1(\Omega)$ e una $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré e la sua conseguenza riguardo alla norma nello spazio $H_0^1(\Omega)$.

**Svolgere il seguente esercizio:**

**4. (7 punti)** Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata, *riscrivendo la soluzione nella forma il più possibile semplificata*:

$$\begin{cases} u_{tt} - 3u_{xx} = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = x^2 e^{-|x|} & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = x \cos x & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Precisare quindi che regolarità ha la soluzione.

Applicando la formula di D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy$$

con $c=\sqrt{3}, g(x)=x^2 e^{-|x|}$ e $h(x)=x\cos x$ si ha:

$$u(x,t)=\frac{\left(x+\sqrt{3}t\right)^2 e^{-\left|x+\sqrt{3}t\right|}+\left(x-\sqrt{3}t\right)^2 e^{-\left|x-\sqrt{3}t\right|}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{x-\sqrt{3}t}^{x+\sqrt{3}t} y\cos y dy.$$

$$\begin{aligned}\int_{x-\sqrt{3}t}^{x+\sqrt{3}t} y\cos y dy &= [y\sin y+\cos y]_{x-\sqrt{3}t}^{x+\sqrt{3}t}\\ &= \left(x+\sqrt{3}t\right)\sin\left(x+\sqrt{3}t\right)+\cos\left(x+\sqrt{3}t\right)\\ &- \left(x-\sqrt{3}t\right)\sin\left(x-\sqrt{3}t\right)-\cos\left(x-\sqrt{3}t\right)\\ &= 2\left\{(x\cos x-\sin x)\sin\left(\sqrt{3}t\right)+\sqrt{3}t\sin x\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right\}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{\left(x+\sqrt{3}t\right)^2 e^{-\left|x+\sqrt{3}t\right|}+\left(x-\sqrt{3}t\right)^2 e^{-\left|x-\sqrt{3}t\right|}}{2}\\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{(x\cos x-\sin x)\sin\left(\sqrt{3}t\right)+\sqrt{3}t\sin x\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right\}\end{aligned}$$

Il secondo addendo è infinitamente derivabile, mentre il primo è $C^2$ ma non più regolare, perché questa è la regolarità della funzione $g(x)$ (come si vede dal calcolo diretto delle derivate). Pertanto la soluzione è $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, ma non più regolare di così.

| Esame di Metodi Analitici per le EDP<br>Primo appello. Giugno 2025<br>Svolgimento Tema 4<br>A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti |
|---|

| | Punti |
|---|---|
| Dom 1 | |
| Dom 2 | |
| Dom 3 | |
| Esercizio | |
| Tot. | |

**Rispondere alle seguenti domande:**

**1. (9 punti)** Si consideri il problema di Neumann per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $r$ che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 & \text{per } \rho \in (0,r), \theta \in [0,2\pi] \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(r,\theta) = f(\theta) & \text{per } \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione $u(\rho,\theta)$, utilizzando il metodo studiato nel corso, e ricavando in particolare la *condizione di compatibilità* che dev'essere soddisfatta da $f$. La soluzione trovata con questo metodo è unica?

Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale -a parte la condizione di compatibilità-.

**2. (9 punti)** Enunciare e dimostrare il *principio di massimo debole per l'equazione del calore* e mostrare come da questo si deduce un risultato di unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet su un dominio opportuno.

**3. (8 punti)** Dopo aver brevemente discusso il concetto di moto browniano, illustrare i significati probabilistici che sono stati discussi nel corso per l'equazione del calore e l'equazione di Laplace.

**Svolgere il seguente esercizio:**

**4. (7 punti)** Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto e reazione con termine di sorgente:

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + 3u = \sin t & \text{per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-|x|} & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Studiare quindi il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè $t \to +\infty$).

La soluzione è assegnata da:

$$u(x,t) = g(x - vt)\, e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} f(x - v(t-s), s)\, ds$$

con $g(x) = e^{-|x|}, f(x,t) = \sin t, v = 2, \gamma = 3$

$$u(x,t) = e^{-3t}e^{-|x-2t|} + \int_0^t e^{-3(t-s)} \sin s ds.$$

$$\int_0^t e^{-3(t-s)} \sin s ds = e^{-3t} \int_0^t e^{3s} \sin s ds = (...)$$
$$= e^{-3t} \left[ \frac{e^{3s}}{10} (3 \sin s - \cos s) \right]_0^t = \frac{1}{10} \left( 3 \sin t - \cos t + e^{-3t} \right).$$

Quindi
$$u(x,t) = e^{-3t}e^{-|x-2t|} + \frac{1}{10} \left( 3 \sin t - \cos t + e^{-3t} \right).$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, per $t \to +\infty$,

$$u(x,t) = \frac{1}{10} (3 \sin t - \cos t) + o(1).$$

La soluzione quindi non si stabilizza su una funzione indipendente dal tempo, ma su una funzione periodica e limitata del tempo.