Esame di Metodi Analitici per le EDP Secondo appello. Luglio 2025 Svolgimento Tema 1 A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione $u(x, y)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. (8 punti) Descrivere i principali problemi ai limiti e ai valori iniziali che si affrontano per l'equazione della corda vibrante limitata (segmento) o illimitata (retta). Quindi, enunciare e dimostrare un risultato di unicità per i problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann per quest'equazione sul segmento.

3. **(9 punti)** Dare la formulazione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + c(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega,$$

(con $a(x)$ scalare) ricavandola dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari.

a. Dimostrare che sotto opportune ipotesi una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

b. Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert.

c. La soluzione del problema risolve anche un problema di minimo di funzionale? Spiegare.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra finita, riscrivendo la soluzione nella forma il più possibile semplificata:

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0 & \text{per } x \in (0, 4), t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = e^x & \text{per } x \in (0, 4). \end{cases}$$

In quale senso è assunta la condizione iniziale? Calcolare il valore della temperatura limite per tempi lunghi.

La soluzione è data da:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$(D=5, L=4) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 5t}{16}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$$

con

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L e^x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx$$

e per $t \to +\infty$,

$$u(t,x) \to \frac{a_0}{2} = \frac{1}{4}\int_0^4 e^x dx = \left[\frac{e^x}{4}\right]_0^4 = \frac{e^4-1}{4}.$$

Calcoliamo per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\int_0^4 e^x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx. \\
I &\equiv \int_0^4 e^x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \left[\frac{4}{n\pi} e^x \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\right]_0^4 - \int_0^4 \frac{4}{n\pi} e^x \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx \\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^4 e^x \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left\{\left[-\frac{4}{n\pi} e^x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\right]_0^4 + \int_0^4 \frac{4}{n\pi} e^x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx\right\} \\
&= \frac{16}{n^2\pi^2}\left(e^4\cos(n\pi) - 1\right) - \frac{16}{n^2\pi^2} I. \\
I &= \frac{\frac{16}{n^2\pi^2}}{1+\frac{16}{n^2\pi^2}}\left(e^4\cos(n\pi)-1\right) = \frac{16}{n^2\pi^2+16}\left(e^4\cos(n\pi)-1\right) \\
a_n &= \frac{1}{2} I = \frac{8}{n^2\pi^2+16}\left(e^4\cos(n\pi)-1\right)
\end{aligned}$$

quindi

$$u(x,t) = \frac{e^4-1}{4} + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e^4\cos(n\pi)-1\right)}{n^2\pi^2+16} e^{-\frac{n^2\pi^2 5t}{16}} \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right).$$

Poiché il dato $f(x) = e^x$ del problema di Cauchy-Neumann è continuo e regolare in $[0,4]$, la condizione iniziale è assunta in senso classico (oltre che L^2).

Esame di Metodi Analitici per le EDP Secondo appello. Luglio 2025 Svolgimento Tema 2 A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Enunciare (senza dimostrazione) il *principio di massimo* per l'*equazione di Poisson*. Quindi enunciare e dimostrare un *teorema di dipendenza continua* per il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.

2. (9 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{per } x \in (0, L)\,. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo di separazione delle variabili è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ con}$$
$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione, e qual è la regolarità della soluzione per $t > 0$.

b. Discutere sotto quali ipotesi e in quali sensi la $u(x,t)$ assume la condizione iniziale, dimostrando le affermazioni fatte.

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

3. (9 punti) Si consideri il problema di Cauchy per l'*equazione lineare del trasporto*, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v costante reale, f, g funzioni assegnate, $u(x,t)$ funzione incognita. Determinare la soluzione del problema, utilizzando i metodi visti nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione e quindi dimostrare che, sotto opportune ipotesi su f e g, è effettivamente soluzione.

[Suggerimento: procedere per passi successivi, a cominciare dal caso $f = 0$].

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi, riscrivendo la soluzione nella forma il più possibile semplificata:

$$\begin{cases} u_{tt} - 3u_{xx} = 0 & \text{per } x \in (0,1)\,, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = \cos(\pi x) & \text{per } x \in (0,1) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 3\sin(2\pi x) & \text{per } x \in (0,1) \end{cases}$$

La soluzione è assegnata da:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\} \\ &\left(L = 1, c = \sqrt{3}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \left\{ a_n \cos\left(n\pi\sqrt{3}t\right) + b_n \sin\left(n\pi\sqrt{3}t\right) \right\} \end{aligned}$$

con

$$\cos(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$$

$$3\sin(2\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\sqrt{3} b_n \sin(n\pi x)\,.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \cos(\pi x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 2\int_0^1 \cos(\pi x)\sin(n\pi x)\,dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \sin((n+1)\pi x) + \sin((n-1)\pi x) \right\} dx \end{aligned}$$

se $n \neq 1$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{\cos((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi} - \frac{\cos((n-1)\pi x)}{(n-1)\pi} \right]_0^1 \\ &= \frac{1-\cos((n+1)\pi)}{(n+1)\pi} + \frac{1-\cos((n-1)\pi x)}{(n-1)\pi} \\ &= (1-\cos((n+1)\pi)) \left(\frac{1}{(n+1)\pi} + \frac{1}{(n-1)\pi} \right) \\ &= (1-\cos((n+1)\pi)) \frac{2n}{(n^2-1)\pi} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{4n}{(n^2-1)\pi} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_1 = \int_0^1 \sin(2\pi x)\, dx = 0$$

$$a_n = a_{2k} = \frac{8k}{(4k^2-1)\pi} \text{ con } n = 2k, k = 1, 2, 3, ...$$

$$3\sin(2\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\sqrt{3}b_n \sin(n\pi x) \text{ per:}$$

$$b_2 = \frac{3}{2\pi\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}, b_n = 0 \text{ per } n \neq 2$$

In definitiva si ha:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\left\{a_n \cos\left(n\pi\sqrt{3}t\right) + b_n \sin\left(n\pi\sqrt{3}t\right)\right\} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sin(n\pi x)\left(1-\cos((n+1)\pi)\right)\frac{2n}{(n^2-1)\pi}\cos\left(n\pi\sqrt{3}t\right) \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\sin(2\pi x)\sin\left(2\pi\sqrt{3}t\right) \\
&= \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin(2k\pi x)\cos\left(2k\pi\sqrt{3}t\right) \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\sin(2\pi x)\sin\left(2\pi\sqrt{3}t\right).
\end{aligned}$$