Esame di Metodi Analitici per le EDP
Terzo appello. Settembre 2025
Svolgimento Tema 1
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 & \text{per } \rho \in (0,r), \theta \in [0,2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) & \text{per } \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

La soluzione, determinata formalmente col metodo di separazione di variabili, è assegnata dalla formula:

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \text{ dove:}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta \text{ per } n = 0,1,2,..$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta)\, d\theta \text{ per } n = 1,2,3,..$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato al bordo f la u assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e quale regolarità ha la soluzione per $\rho < r$.

b. Dimostrare sotto quali ipotesi e in quali sensi la soluzione assume il dato al bordo.

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

2. (9 punti) Si consideri il problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Impostare la soluzione di questo problema col *metodo delle medie sferiche*, dimostrando come si ottiene, nel caso $n = 3$, la formula di Kirchhoff. [Non è richiesta la dimostrazione dell'*equazione di Darboux*].

3. **(8 punti)** Dare la definizione di derivata debole (anche di ordine successivo al primo) e definire gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e $H^k(\Omega)$ per Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, con la loro struttura di spazi di Banach e di Hilbert, rispettivamente. Quindi, dimostrare che $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto con termine di sorgente:

$$\begin{cases} u_t - 5u_x = x \sin t & \text{per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-|x|} \sin x & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Studiare poi il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè per $t \to +\infty$): la soluzione si stabilizza su una funzione indipendente dal tempo, e se sì quale?

La soluzione è assegnata da:

$$u(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s)\, ds$$

$$\text{con } g(x) = e^{-|x|} \sin x,\, f(x,t) = x \sin t,\, v = -5$$

$$u(x,t) = e^{-|x+5t|} \sin(x+5t) + \int_0^t (x + 5(t-s)) \sin s ds$$

$$\begin{aligned} &\int_0^t (x + 5t - 5s) \sin s ds = (x+5t)[-\cos s]_0^t - 5 \int_0^t s \sin s ds \\ &= (x+5t)(1-\cos t) - 5\left\{[-s\cos s]_0^t + \int_0^t \cos ds\right\} \\ &= (x+5t)(1-\cos t) - 5\{-t\cos t + \sin t\} \\ &= x + 5t - x\cos t - 5\sin t. \end{aligned}$$

Quindi

$$u(x,t) = e^{-|x+5t|} \sin(x+5t) + x + 5t - x\cos t - 5\sin t.$$

Per ogni x fissato e $t \to \infty$, $u(x,t) \sim 5t \to +\infty$. In particolare, la soluzione non si stabilizza su una funzione indipendente dal tempo.