Esame di Metodi Analitici per le EDP
Quinto appello. Febbraio 2026
Tema 1
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Enunciare e dimostrare il *teorema della media* per funzioni armoniche in n variabili. Dimostrare anche l'*equivalenza tra le due proprietà di media.*

2. (9 punti) Si consideri il seguente *problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi*:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

3. **(9 punti)** Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per *problema variazionale astratto*. Quindi enunciare e dimostrare il teorema che mette in relazione la soluzione di un problema variazionale astratto con un problema di minimizzazione di un opportuno funzionale.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra limitata:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 & \text{per } x \in (0,2), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (0,1) \\ 2 - x & \text{per } x \in (1,2). \end{cases} \end{cases}$$

In quale senso è assunta la condizione iniziale? Calcolare il valore della temperatura limite per tempi lunghi.

Esame di Metodi Analitici per le EDP Quinto appello. Febbraio 2026 Svolgimento Tema 1 A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Enunciare e dimostrare il *teorema della media* per funzioni armoniche in n variabili. Dimostrare anche l'*equivalenza tra le due proprietà di media*. [**Slide 3**]

2. (9 punti) Si consideri il seguente *problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi*:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale. [**Slide 9**]

3. **(9 punti)** Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per *problema variazionale astratto*. Quindi enunciare e dimostrare il teorema che mette in relazione la soluzione di un problema variazionale astratto con un problema di minimizzazione di un opportuno funzionale. [**Slide 13**]

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra limitata:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 & \text{per } x \in (0,2), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (0,1) \\ 2 - x & \text{per } x \in (1,2). \end{cases} \end{cases}$$

In quale senso è assunta la condizione iniziale? Calcolare il valore della temperatura limite per tempi lunghi.

La soluzione è data da:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$(D=3, L=2) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{3n^2\pi^2 t}{4}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

con

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,dx = \int_0^1 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 (2-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx.$$

e per $t \to +\infty$,

$$u(t,x) \to \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x)\,dx\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+2-\frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 (2-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\
&= \left\{\left[\frac{x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}dx\right\} \\
&+ \left\{\left[\frac{(2-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}dx\right\} \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^1 - \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - \cos(n\pi) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

quindi

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - \cos(n\pi)\right)e^{-\frac{3n^2\pi^2 t}{4}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Poiché il dato iniziale del problema di Cauchy-Neumann è continuo e regolare a tratti in $[0,2]$, la condizione iniziale è assunta in senso classico (oltre che L^2).

(D'altro canto, si osserva che la serie che definisce la soluzione converge totalmente per $t \geq 0$).