Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2022
Svolgimento Tema 1
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = \sin x \cos^3 x \text{ per } x \in (0,\pi) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \pi x - x^2 \text{ per } x \in (0,\pi) \end{cases}$$

La soluzione è assegnata da:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left\{a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right\}.$$

Qui $L = \pi, c = 2$ perciò

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\{a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)\},$$

con

$$\sin x \cos^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

$$\pi x - x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin(nx).$$

Si ha:

$$\sin x \cos^3 x = \sin x \cos x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x.$$
$$a_2 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{8}, a_n = 0 \text{ per gli altri } n.$$

Inoltre:

$$2nb_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi x - x^2\right)\sin(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi x - x^2\right)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}\left\{\left[-\left(\pi x - x^2\right)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(\pi - 2x)\frac{\cos(nx)}{n}dx\right\}$$
$$= \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n^2\pi}\left\{\left[(\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\frac{\sin(nx)}{n}dx\right\}$$
$$= \frac{2}{n^3\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{n^3\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n^4}\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^4} & \text{se } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}.$$

In definitiva si ha:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{4}\sin 2x\cos(4t)+\frac{1}{8}\sin 4x\cos 8t+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)\left(\frac{1-\cos n\pi}{n^4}\right)\sin(2nt)\\
&= \frac{1}{4}\sin 2x\cos(4t)+\frac{1}{8}\sin 4x\cos 8t+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^4}\sin(2(2k+1)t)
\end{aligned}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2022
Svolgimento Tema 2
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Svolgere il seguente esercizio:
5. Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(\rho,\theta) = 0 & \text{per } \rho < 2, \theta \in [-\pi,\pi] \\ u(2,\theta) = |\sin\theta| & \text{per } \theta \in [-\pi,\pi] \end{cases}$$

Dobbiamo sviluppare in serie di Fourier il dato al bordo $f(\theta) = |\sin\theta|$ in $[-\pi,\pi]$. La funzione è pari, perciò

$$\begin{aligned} \beta_n &= 0, \\ \alpha_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\cos(n\theta)\,d\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{2}{\pi}[-\cos\theta]_0^\pi = \frac{4}{\pi}. \\ \alpha_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta}{2}d\theta \\ &= (\text{purché } n \neq 1)\ \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta - 1}{n-1}\right] \\ &= \frac{1-\cos(n+1)\pi}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1+\cos n\pi}{1-n^2}\right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \\ \alpha_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

Poiché $r = 2$, la soluzione è:

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=2}^\infty \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \alpha_n \cos(n\theta) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^\infty \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \left(\frac{1+\cos(n\pi)}{n^2-1}\right)\cos(n\theta) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{4k^2-1}\right)\cos(2k\theta). \end{aligned}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2022
Svolgimento Tema 3
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Svolgere il seguente esercizio:
5. Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \text{ per } x^2+y^2<3 \\ u = x^2y^2 \text{ per } x^2+y^2=3 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ,θ) e poi di (x,y).

Anzitutto esprimiamo il dato al bordo in funzione di θ, cioè in coordinate polari per $\rho=\sqrt{3}$:

$$x^2y^2 = \left(\sqrt{3}\cos\theta\right)^2\left(\sqrt{3}\sin\theta\right)^2 = 9\cos^2\theta\sin^2\theta \equiv f(\theta).$$

Ora osserviamo che il dato al bordo è un polinomio trigonometrico, cioè può essere riscritto come somma di una serie di Fourier finita, usando le identità trigonometriche:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 9\cos^2\theta\sin^2\theta = 9\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\sin^2(2\theta) = \frac{9}{4}\left(\frac{1-\cos(4\theta)}{2}\right) \\ &= \frac{9}{8}-\frac{9}{8}\cos(4\theta). \end{aligned}$$

Quindi la soluzione è:

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) &= \frac{9}{8}-\frac{9}{8}\left(\frac{\rho}{\sqrt{3}}\right)^4\cos(4\theta) \\ &= \frac{9}{8}-\frac{1}{8}\rho^4\cos(4\theta), \end{aligned}$$

e può essere riscritta in coordinate cartesiane, osservando che

$$\begin{aligned} \rho^4\cos(4\theta) &= \mathrm{Re}\,(x+iy)^4 = \mathrm{Re}\left[\left(\left(x^2-y^2\right)+2ixy\right)^2\right] \\ &= \left(x^2-y^2\right)^2-4x^2y^2 = x^4+y^4-6x^2y^2 \end{aligned}$$

quindi

$$u(x,y) = \frac{9}{8}-\frac{1}{8}\left(x^4+y^4-6x^2y^2\right).$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2022
Svolgimento Tema 4
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Svolgere il seguente esercizio:
5. Risolvere il problema di Neumann per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \text{ per } x^2+y^2<2 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = xy^3 \text{ per } x^2+y^2=2 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ,θ) e poi di (x,y).

Anzitutto esprimiamo il dato al bordo in funzione di θ, cioè in coordinate polari per $\rho = r = \sqrt{2}$:

$$xy^3 = \sqrt{2}\cos\theta\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)^3 = 4\cos\theta\sin^3\theta \equiv f(\theta).$$

Ora osserviamo che il dato al bordo è un polinomio trigonometrico, cioè può essere riscritto come somma di una serie di Fourier finita, usando le identità trigonometriche:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4\cos\theta\sin^3\theta = (2\cos\theta\sin\theta)\cdot 2\sin^2\theta = \sin(2\theta)\,2\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right) \\ &= \sin(2\theta) - \sin(2\theta)\cos(2\theta) = \sin(2\theta) - \frac{1}{2}\sin(4\theta). \end{aligned}$$

La soluzione del problema di Neumann (a meno di costante additiva) è:

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n (a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)^2 \sin(2\theta) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)^4 \sin(4\theta) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\rho^2\sin(2\theta) - \frac{\sqrt{2}}{32}\rho^4\sin(4\theta). \end{aligned}$$

La soluzione può essere riscritta in coordinate cartesiane, osservando che

$$\rho^2\sin(2\theta) = \operatorname{Im}(x+iy)^2 = 2xy$$
$$\rho^4\sin(4\theta) = \operatorname{Im}(x+iy)^4 = \operatorname{Im}\left[\left(\left(x^2-y^2\right)+2ixy\right)^2\right] = 4xy\left(x^2-y^2\right)$$

quindi

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{\sqrt{2}}{4}2xy - \frac{\sqrt{2}}{32}4xy\left(x^2-y^2\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}xy\left(4-x^2+y^2\right). \end{aligned}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Secondo appello. Luglio 2022
Svolgimento Tema 1
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto e reazione con termine di sorgente:

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + 6u = xe^{-t} \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-3x} \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Studiare quindi il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè $t \to \infty$).

La soluzione è assegnata da:

$$u(x,t) = g(x - vt)\, e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} f(x - v(t-s), s)\, ds$$

con $g(x) = e^{-3x}, f(x,t) = xe^{-t}, v = 2, \gamma = 6$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-3(x-2t)} e^{-6t} + \int_0^t (x - 2(t-s))\, e^{-6(t-s)} e^{-s} ds \\ &= e^{-3x} + e^{-6t} \int_0^t (x - 2(t-s))\, e^{5s} ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t (x - 2(t-s))\, e^{5s} ds &= \left[(x - 2(t-s)) \frac{e^{5s}}{5} \right]_0^t - 2 \int_0^t \frac{e^{5s}}{5} ds \\ &= \frac{xe^{5t} - (x - 2t)}{5} - \frac{2}{25} \left(e^{5t} - 1 \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-3x} + e^{-6t} \left\{ \frac{xe^{5t} - (x - 2t)}{5} - \frac{2}{25} \left(e^{5t} - 1 \right) \right\} \\ &= e^{-3x} + \frac{xe^{-t} - e^{-6t}(x - 2t)}{5} - \frac{2}{25} \left(e^{-t} - e^{-6t} \right). \end{aligned}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, per $t \to +\infty$, $u(x,t) \to e^{-3x}$.
(La soluzione quindi si stabilizza sullo stesso valore iniziale).

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Secondo appello. Luglio 2022
Svolgimento Tema 2
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,\pi), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = e^{3x} \text{ per } x \in (0,\pi). \end{cases}$$

In quale senso è assunta la condizione iniziale? Calcolare il valore della temperatura limite per tempi lunghi.

La soluzione è data da:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$(D = 5, L = \pi)$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-5n^2 t} a_n \cos(nx)$$

con

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{3x}\cos(nx)\,dx.$$

e per $t \to +\infty$,

$$u(t,x) \to \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{3x}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^\pi = \frac{e^{3\pi}-1}{3\pi}.$$

Calcoliamo per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{3x}\cos(nx)\,dx = (...) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{3x}}{9+n^2}(3\cos(nx) + n\sin(nx))\right]_0^\pi \\ &= \frac{6}{\pi(9+n^2)}\left[e^{3\pi}\cos(n\pi) - 1\right] \end{aligned}$$

quindi

$$u(x,t) = \frac{e^{3\pi}-1}{3\pi} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-5n^2 t}\left[\frac{e^{3\pi}\cos(n\pi)-1}{9+n^2}\right]\cos(nx).$$

Si osserva che la serie converge totalmente per $t \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} \left[\frac{e^{3\pi}\cos(n\pi) - 1}{9+n^2} \right] \cos(nx) \right| \leq \left(e^{3\pi}+1\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9+n^2},$$

quindi la u è continua per $t \geq 0$ e la condizione iniziale è assunta con continuità (come limite uniforme).

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Terzo appello. Settembre 2022
Svolgimento Tema 1
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione (non omogenea) della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t \cos x \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 3 \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Precisare quindi che regolarità ha la soluzione.

Applicando la formula di D'Alembert e la formula per l'equazione non omogenea

$$u(x, t) = \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy + \int_0^t \left(\frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s)\, dy \right) ds$$

con $c = 1, g(x) = e^{-x^2}$, $f(x, t) = t \cos x$ e $h(x) = 3$ si ha:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 3dy + \int_0^t \left(\frac{1}{2} \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \cos y dy \right) s ds \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + \frac{3}{2} \cdot 2t + \frac{1}{2} \int_0^t (\sin(x + t - s) - \sin(x - t + s))\, s ds \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + 3t \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ [(\cos(x - t + s) + \cos(x + t - s))\, s]_0^t - \int_0^t (\cos(x - t + s) + \cos(x + t - s))\, ds \right\} \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + 3t \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ 2t \cos x - \int_0^t (\cos(x - s) + \cos(x + s))\, ds \right\} \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + 3t \\
&+ t \cos x + \frac{1}{2} [\sin(x - s) - \sin(x + s)]_0^t \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + 3t + t \cos x + \frac{1}{2} [\sin(x - t) - \sin(x + t)] \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + 3t + t \cos x - \cos x \sin t.
\end{aligned}$$

La soluzione è infinitamente derivabile, come lo sono termine noto e condizioni iniziali.

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Terzo appello. Settembre 2022.
Svolgimento Tema 2
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Svolgere il seguente esercizio:
5. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione (non omogenea) della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{4}u_{xx} = e^x \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = xe^{-|x|} \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin(2x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Precisare quindi che regolarità ha la soluzione.

Applicando la formula di D'Alembert e la formula per l'equazione non omogenea

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy + \int_0^t \left(\frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,dy\right) ds$$

con $c = \frac{1}{2}, g(x) = xe^{-|x|}$, $f(x,t) = e^x$ e $h(x) = \sin(2x)$ si ha:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\left(x + \frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x+\frac{1}{2}t\right|} + \left(x - \frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x-\frac{1}{2}t\right|}}{2} \\ &+ \int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} \sin(2y)\,dy + \int_0^t \left(\int_{x-\frac{1}{2}(t-s)}^{x+\frac{1}{2}(t-s)} e^y dy\right) ds. \end{aligned}$$

$$\int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} \sin(2y)\,dy = \left[-\frac{1}{2}\cos(2y)\right]_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}\left(\cos(2x-t) - \cos(2x+t)\right).$$

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left(\int_{x-\frac{1}{2}(t-s)}^{x+\frac{1}{2}(t-s)} e^y dy\right) ds = \int_0^t \left(e^{x+\frac{1}{2}(t-s)} - e^{x-\frac{1}{2}(t-s)}\right) ds = e^x \int_0^t \left(e^{\frac{1}{2}s} - e^{-\frac{1}{2}s}\right) ds \\ &= e^x \left[2e^{\frac{1}{2}s} + 2e^{-\frac{1}{2}s}\right]_0^t = 2e^x\left(e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t} - 2\right) = 4e^x\left(\mathrm{Ch}\left(\frac{t}{2}\right) - 1\right). \end{aligned}$$

In definitiva,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\left(x+\frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x+\frac{1}{2}t\right|}+\left(x-\frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x-\frac{1}{2}t\right|}}{2} \\
&+\frac{1}{2}\left(\cos(2x-t)-\cos(2x+t)\right) \\
&+4e^{x}\left(\mathrm{Ch}\left(\frac{t}{2}\right)-1\right) \\
&= \frac{\left(x+\frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x+\frac{1}{2}t\right|}+\left(x-\frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x-\frac{1}{2}t\right|}}{2} \\
&+\sin(2x)\sin t+2e^{x+\frac{t}{2}}+2e^{x-\frac{t}{2}}-4e^{x}.
\end{aligned}
$$

La soluzione è C^1 ma non C^2, come lo è il dato iniziale $g(x)=xe^{-|x|}$.

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Quarto appello. Gennaio 2023
Svolgimento Tema 1
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sulla sbarra finita, dopo aver previsto in base alla teoria in che senso sarà assunto il dato iniziale:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), t > 0 \\ u(0,t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = x\cos x \end{cases}$$

Poiché il dato iniziale $f(x) = x\cos x$ è continua, regolare e rispetta la condizione di raccordo $f(0) = f(\pi) = 0$, il dato iniziale sarà assunto come limite uniforme, oltre che L^2.

La soluzione è data da:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &\left(L = \frac{\pi}{2}, D = 4\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-16n^2 t} b_n \sin(2nx) \\ &\text{con} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x\cos x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\sin(2nx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\frac{1}{2}\left\{\sin\left[(2n+1)x\right] + \sin\left[(2n-1)x\right]\right\} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-x\left\{\frac{\cos\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)}+\frac{\cos\left[(2n-1)\,x\right]}{(2n-1)}\right\}\right]_0^{\pi/2}\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{\cos\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)}+\frac{\cos\left[(2n-1)\,x\right]}{(2n-1)}\right\}dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{0+\left[\frac{\sin\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)^2}+\frac{\sin\left[(2n-1)\,x\right]}{(2n-1)^2}\right]_0^{\pi/2}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n+1)^2}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)}{(2n-1)^2}\right\}=\frac{2}{\pi}\,(-1)^n\left\{\frac{1}{(2n+1)^2}-\frac{1}{(2n-1)^2}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\,(-1)^n\left\{\frac{-8n}{(4n^2-1)^2}\right\}=\frac{16}{\pi}\,(-1)^{n+1}\,\frac{n}{(4n^2-1)^2}$$

$$u\,(x,t)=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-16n^2t}\,(-1)^{n+1}\,\frac{n}{(4n^2-1)^2}\sin\left(2nx\right).$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Quinto appello. Febbraio 2023
Svolgimento Tema 2
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Svolgere il seguente esercizio:
5. Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u\,(x,y) = 0 \text{ per } x^2+y^2<5 \\ u = x^2y-3xy^2 \text{ per } x^2+y^2=5 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ,θ) e poi di (x,y).

Anzitutto esprimiamo il dato al bordo in funzione di θ, cioè in coordinate polari per $\rho=\sqrt{5}$:

$$x^2y-3xy^2 = 5\sqrt{5}\left(\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) \equiv f\,(\theta)\,.$$

Ora osserviamo che il dato al bordo è un polinomio trigonometrico, cioè può essere riscritto come somma di una serie di Fourier finita, usando le identità trigonometriche:

$$\begin{aligned} f\,(\theta) &= 5\sqrt{5}\cos\theta\sin\theta\,(\cos\theta-3\sin\theta) = \frac{5\sqrt{5}}{2}\left\{\sin\,(2\theta)\cos\theta - 3\sin\,(2\theta)\sin\theta\right\} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{4}\left\{\sin\,(3\theta)+\sin\theta+3\cos\,(3\theta)-3\cos\theta\right\}. \end{aligned}$$

Quindi la soluzione è:

$$\begin{aligned} u\,(\rho,\theta) &= \frac{5\sqrt{5}}{4}\left\{\left(\frac{\rho}{\sqrt{5}}\right)(\sin\theta-3\cos\theta)+\left(\frac{\rho}{\sqrt{5}}\right)^3(3\cos\,(3\theta)+\sin\,(3\theta))\right\} \\ &= \frac{5}{4}\,(\rho\sin\theta-3\rho\cos\theta)+\frac{1}{4}\left(3\rho^3\cos\,(3\theta)+\rho^3\sin\,(3\theta)\right). \end{aligned}$$

Riscriviamola in coordinate cartesiane

$$\begin{aligned} u\,(x,y) &= \frac{5}{4}\,(y-3x)+\frac{1}{4}\left(3\,\mathrm{Re}\,(x+iy)^3+\mathrm{Im}\,(x+iy)^3\right) \\ &= \frac{5}{4}\,(y-3x)+\frac{1}{4}\left(3\left(x^3-3xy^2\right)+\left(3x^2y-y^3\right)\right) \\ &= \frac{5}{4}y-\frac{15}{4}x+\frac{1}{4}\left(3x^2y-y^3+3x^3-9xy^2\right). \end{aligned}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2023
Svolgimento Tema 1
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{4}u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = x\cos x \end{cases}$$

Prevedere in base alla teoria il valore della temperatura limite per tempi lunghi, prima di risolvere il problema.

La soluzione è data da:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$(D = \frac{1}{4}, L = \frac{\pi}{2})$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} a_n \cos(2nx)$$

con

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\cos(2nx)\,dx$$

e per $t \to +\infty$,

$$u(t,x) \to \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \frac{2}{\pi}\left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\cos(2nx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\frac{1}{2}\left\{\cos\left[(2n+1)x\right] + \cos\left[(2n-1)x\right]\right\}dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[x\left\{\frac{\sin\left[(2n+1)x\right]}{(2n+1)}+\frac{\sin\left[(2n-1)x\right]}{(2n-1)}\right\}\right]_0^{\pi/2}\right.$$
$$\left.-\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{\sin\left[(2n+1)x\right]}{(2n+1)}+\frac{\sin\left[(2n-1)x\right]}{(2n-1)}\right\}dx\right\}$$
$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n+1)}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)}{(2n-1)}\right)+\left[\frac{\cos\left[(2n+1)x\right]}{(2n+1)^2}+\frac{\cos\left[(2n-1)x\right]}{(2n-1)^2}\right]_0^{\pi/2}\right\}$$
$$= (-1)^n\left(\frac{1}{(2n+1)}-\frac{1}{(2n-1)}\right)-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)$$
$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{8n^2+2}{(4n^2-1)^2}\right)=2\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}\right)\right\}.$$

$$u(x,t)=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2t}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}\right)\right\}\cos(2nx).$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2023
Svolgimento Tema 2
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

Svolgere il seguente esercizio:
4. (7 punti) Risolvere il problema di Neumann per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(\rho,\theta)=0 & \text{per } \rho<2, \theta\in[-\pi,\pi] \\ \frac{\partial u}{\partial\nu}(2,\theta)=\theta|\theta|+2\theta & \text{per } \theta\in[-\pi,\pi] \end{cases}$$

Sia
$$f(\theta)=\theta|\theta|+2\theta \text{ in } [-\pi,\pi]$$
e calcoliamone i coefficienti di Fourier. Poiché f è *dispari* su $[-\pi,\pi]$ si ha:

$$a_n=0;$$
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\theta^2+2\theta\right)\sin n\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-2+\left(2-\pi(2+\pi)n^2\right)\cos(n\pi)}{n^3}\right)$$

La formula che assegna la soluzione del problema di Neumann è

$$u(\rho,\theta)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta\right)$$

dove i coefficienti α_n, β_n vanno scelti in modo che la derivata rispetto a ρ sul bordo (per $\rho = r = 2$) coincida col dato, quindi:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho, \theta)_{/\rho=2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)_{/\rho=2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) = f(\theta),
\end{aligned}
$$

perciò la relazione tra α_n, β_n e i coefficienti di Fourier a_n, b_n di f è:

$$
\begin{aligned}
n2^{n-1}\alpha_n &= a_n \\
n2^{n-1}\beta_n &= b_n
\end{aligned}
$$

con la condizione necessaria $a_0 = 0$ (condizione di compatibilità), e u determinata a meno della costante additiva α_0. Quindi

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= 0 \\
\beta_n &= \frac{2}{\pi n 2^{n-1}} \left(\frac{-2 + \left(2 - \pi(2+\pi) n^2\right) \cos(n\pi)}{n^3} \right) \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\frac{-2 + \left(2 - \pi(2+\pi) n^2\right) \cos(n\pi)}{2^n n^4} \right)
\end{aligned}
$$

$$
u(\rho, \theta) = \alpha_0 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(\frac{-2 + \left(2 - \pi(2+\pi) n^2\right) \cos(n\pi)}{2^n n^4} \right) \sin n\theta
$$

con α_0 indeterminata.

Esame di Metodi Analitici per le EDP Primo appello. Giugno 2023 Svolgimento Tema 3 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto con termine di sorgente:

$$\begin{cases} u_t - u_x = \frac{t}{1+x^2} \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^4} \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione è assegnata da:

$$u(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s)\, ds$$

$$\text{con } g(x) = \frac{1}{1+x^4}, f(x,t) = \frac{t}{1+x^2}, v = -1$$

$$u(x,t) = \frac{1}{1+(x+t)^4} + \int_0^t \frac{s}{1+(x+t-s)^2} ds$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{s}{1+(x+t-s)^2} ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{2s - 2(x+t)}{s^2 - 2s(x+t) + (x+t)^2 + 1} ds + (x+t) \int_0^t \frac{ds}{1+(x+t-s)^2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\log\left(1 + (x+t-s)^2\right) \right]_0^t + (x+t) \left[-\arctan(x+t-s) \right]_0^t \\
&= \frac{1}{2} \left[\log\left(1+x^2\right) - \log\left(1+(x+t)^2\right) \right] + (x+t) \left[\arctan(x+t) - \arctan x \right]
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
u(x,t) = &\frac{1}{1+(x+t)^4} + \frac{1}{2} \left[\log\left(1+x^2\right) - \log\left(1+(x+t)^2\right) \right] \\
&+ (x+t) \left[\arctan(x+t) - \arctan x \right].
\end{aligned}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Primo appello. Giugno 2023 Svolgimento Tema 4 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = \cos x \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin^2 x \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

riscrivendo la soluzione nella forma il più possibile semplificata. Per tempi lunghi la soluzione è limitata?

La soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = \cos x \equiv g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin^2 x \equiv h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

in base alla formula di D'Alembert è

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy$$

$(c = 3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{g(x+3t) + g(x-3t)}{2} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} h(y)\,dy \\ &= \frac{\cos(x+3t) + \cos(x-3t)}{2} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \sin^2 y dy \\ &= \cos x \cos 3t + \frac{1}{6}\left[\frac{y - \sin y \cos y}{2}\right]_{x-3t}^{x+3t} \\ &= \cos x \cos 3t + \frac{t}{2} - \frac{1}{12}\left[\frac{\sin(2x+6t) - \sin(2x-6t)}{2}\right] \\ &= \cos x \cos 3t + \frac{t}{2} - \frac{1}{12}\cos(2x)\sin(6t). \end{aligned}$$

La soluzione è somma di funzioni trigonometriche limitate più il termine $t/2$, illimitato, perciò è *illimitata* per tempi lunghi

Esame di Metodi Analitici per le EDP Secondo appello. Luglio 2023 Svolgimento Tema 1 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	8
Dom 2	9
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,2)\,, t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x \text{ per } x \in (0,1) \\ 1 \text{ per } x \in (1,2)\,. \end{cases} \end{cases}$$

In base alla teoria, in questo caso, in quale senso si può prevedere che sarà assunta la condizione iniziale?

Poiché il dato iniziale $f(x) = \begin{cases} x \text{ per } x \in (0,1) \\ 1 \text{ per } x \in (1,2) \end{cases}$ non rispetta la condizione di raccordo $f(0) = f(2) = 0$, il limite non sarà uniforme. La condizione iniziale sarà assunta puntualmente (non uniformemente) in $(0,1)$ e sarà assunta in senso $L^2(0,1)$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &(L = 2, D = 3) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}n^2\pi^2 t} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\ &\text{con} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^1 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\ &= \frac{-2n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2} + \frac{2\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)}{n\pi} \\ &= \frac{4\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2} - \frac{2\cos(n\pi)}{n\pi}. \end{aligned}$$

Quindi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}n^2\pi^2 t}\left\{\frac{4\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2} - \frac{2\cos(n\pi)}{n\pi}\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Secondo appello. Luglio 2023
Svolgimento Tema 2
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Svolgere il seguente esercizio:
4. (7 punti) Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{per } x^2+y^2<2 \\ u(x,y) = x^4 - y^4 + 3y & \text{per } x^2+y^2=2 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ,θ) e poi di (x,y).

$r=\sqrt{2}$; il dato al bordo è:

$$x^4 - y^4 + 3y = \left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right) + 3y = 2\left(x^2-y^2\right) + 3y$$

ponendo $x=\sqrt{2}\cos\theta, y=\sqrt{2}\sin\theta$

$$= 2\left(2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\right) + 3\sqrt{2}\sin\theta = 4\cos 2\theta + 3\sqrt{2}\sin\theta \equiv f(\theta).$$

La soluzione quindi è:

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) &= 3\sqrt{2}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\sin\theta + 4\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)^2\cos 2\theta \\ &= 3\rho\sin\theta + 2\rho^2\cos 2\theta \end{aligned}$$

e in coordinate cartesiane si riscrive:

$$u(x,y) = 3y + 2\,\mathrm{Re}\left((x+iy)^2\right) = 3y + 2\left(x^2-y^2\right).$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Terzo appello. Agosto 2023 Svolgimento Tema 1 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0, 2\pi), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, \end{cases}$$

riscrivendo la soluzione ottenuta nel modo più semplice possibile.

Prevedere in base alla teoria il valore della temperatura limite per tempi lunghi, prima di risolvere il problema.

La soluzione è data da:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$(D = 3, L = 2\pi)$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}n^2 t} a_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

con

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin x \cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx$$

e per $t \to +\infty$,

$$u(t,x) \to \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin x \cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\sin\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)x\right] - \sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)x\right]\right\}dx \end{aligned}$$

per $n \neq 2$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)x\right]}{\left(\frac{n}{2}+1\right)}+\frac{\cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)x\right]}{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-\cos(n\pi)}{\frac{n}{2}+1}+\frac{\cos(n\pi)-1}{\frac{n}{2}-1}\right) \\
&= \frac{1-\cos(n\pi)}{2\pi}\left(\frac{-2}{\frac{n^2}{4}-1}\right) = \frac{-1+\cos(n\pi)}{\pi}\left(\frac{4}{n^2-4}\right) \\
&= \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ pari} \\ -\frac{8}{\pi}\frac{1}{n^2-4} \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Per $n = 2$:

$$
a_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2x)\,dx = 0.
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2-4}e^{-\frac{3}{4}n^2 t}\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \\
&= -\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2-4}e^{-\frac{3}{4}(2k+1)^2 t}\cos\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Terzo appello. Agosto 2023 Svolgimento Tema 2 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	9
Dom 3	8
Esercizio	7
Tot.	33

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione (non omogenea) della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sqrt[3]{x} \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \cos(2x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

riscrivendo la soluzione nella forma il più possibile semplificata. Dire quindi (dopo averla determinata) che regolarità ha la soluzione.

La soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sqrt[3]{x} \equiv f(x,t) \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \cos(2x) \equiv g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

si ottiene per il principio di sovrapposizione sommando la soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \cos(2x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

che, per la formula di D'Alembert, è

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2}$$

$(c = 2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{g(x+2t) + g(x-2t)}{2} = \frac{\cos(2x+4t) + \cos(2x-4t)}{2} \\ &= \cos 2x \cos 4t \end{aligned}$$

e la soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sqrt[3]{x} \equiv f(x,t) \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

che, per la formula di Duhamel (con $f(x,t) = \sqrt[3]{x}$) è:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,dy\right) ds \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \left(\int_{x-2(t-s)}^{x+2(t-s)} y^{1/3} dy\right) ds \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \frac{4}{3}\left[(x+2(t-s))^{4/3} - (x-2(t-s))^{4/3}\right] ds \\
&= \frac{1}{3}\int_0^t \left[(x+2s)^{4/3} - (x-2s)^{4/3}\right] ds \\
&= \frac{1}{3}\frac{3}{7}\frac{1}{2}\left[\left((x+2t)^{7/3} - x^{7/3}\right) - \left((x-2t)^{7/3} - x^{7/3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{14}\left[(x+2t)^{7/3} - (x-2t)^{7/3}\right].
\end{aligned}$$

Quindi la soluzione del problema iniziale è:

$$u(x,t) = \cos 2x \cos 4t + \frac{1}{14}\left[(x+2t)^{7/3} - (x-2t)^{7/3}\right]$$

ed è di classe $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ (ma non più regolare di così).

Esame di Metodi Analitici per le EDP Quarto appello. Gennaio 2024 Svolgimento Tema 1 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Svolgere il seguente esercizio:
4. (7 punti) Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{per } x^2+y^2<1 \\ u(x,y) = x\,|y| & \text{per } x^2+y^2=1, \end{cases}$$

riscrivendo la soluzione trovata nel modo il più possibile semplificato.

$r=1$; il dato al bordo è (ponendo $x=\cos\theta, y=\sin\theta$)

$$x\,|y| = \cos\theta\,|\sin\theta| \equiv f(\theta).$$

La soluzione quindi è:

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right)$$

dove

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right)$$

è lo sviluppo di Fourier di $f(\theta) = \cos\theta\,|\sin\theta|$ in $[-\pi,\pi]$. Poiché f è pari, $b_n=0$ e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta\sin\theta\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2\theta)\cos(n\theta)\,d\theta. \end{aligned}$$

Perciò per $n=0$ si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2\theta)\,d\theta = 0$$

mentre per $n=1,2,3,...$ è:

$$\sin(2\theta)\cos(n\theta) = \frac{\sin((n+2)\theta) - \sin((n-2)\theta)}{2}$$

e

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left[\sin\left((n+2)\,\theta\right) - \sin\left((n-2)\,\theta\right)\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos\left((n+2)\,\theta\right)}{n+2} + \frac{\cos\left((n-2)\,\theta\right)}{n-2}\right]_0^\pi \quad (\text{per } n \neq 2) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-\cos(n\pi)}{n+2} + \frac{\cos(n\pi)-1}{n-2}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)\left(\frac{-4}{n^2-4}\right) = \frac{2}{\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)\left(\frac{1}{4-n^2}\right) = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{4-n^2} \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases}
\end{aligned}$$

Per $n = 2$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(4\theta)\, d\theta = 0.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
u(\rho,\theta) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos(n\pi)\right)\left(\frac{1}{4-n^2}\right)\rho^n \cos(n\theta) \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4-(2k+1)^2}\,\rho^{2k+1}\cos\left((2k+1)\,\theta\right).
\end{aligned}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Quinto appello. Febbraio 2024 Svolgimento Tema 1 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	8
Dom 2	9
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - 5u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,2), t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = 0 \text{ per } x \in (0,2) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(\pi x) \text{ per } x \in (0,2) \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet in generale è data dalla formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left\{a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right\}$$

dove

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

e

$$b_n = \frac{\beta_n}{\frac{n\pi c}{L}}.$$

Nel nostro caso $L = 2, c = \sqrt{5}, u(x,0) = 0$ quindi $a_n = 0$. I coefficienti β_n vanno calcolati sviluppando in serie di soli seni la funzione $g(x) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(\pi x)$.

Poiché g è un polinomio trigonometrico che è anche funzione dispari, si può trasformare in sviluppo finito di soli seni mediante identità trigonometriche.

Si ha:

$$
\begin{aligned}
&\sin^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(\pi x)\\
&=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(\pi x)}{2}\right)\cos(\pi x)\\
&=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\cos(\pi x)-\cos^2(\pi x)\right)\\
&=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\cos(\pi x)-\left(\frac{1+\cos(2\pi x)}{2}\right)\right)\\
&=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(\pi x)-\frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(2\pi x)\right)\\
&=\frac{1}{4}\left[\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{1}{8}\left[\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)-\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{3}{8}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)-\frac{1}{8}\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Quindi la soluzione è:

$$
\begin{aligned}
u(x,t)&=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi\sqrt{5}t}{2}\right)}{\frac{\pi\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{8}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{3\pi\sqrt{5}t}{2}\right)}{\frac{3\pi\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{8}\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{5\pi\sqrt{5}t}{2}\right)}{\frac{5\pi\sqrt{5}}{2}}\\
&=-\frac{1}{\pi\sqrt{5}}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi\sqrt{5}t}{2}\right)+\frac{1}{4\pi\sqrt{5}}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi\sqrt{5}t}{2}\right)-\frac{1}{20\pi\sqrt{5}}\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{5\pi\sqrt{5}t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ed è infinitamente derivabile.