Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2022
Tema 1
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Dom 4	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0 \text{ per } \rho \in (0,r), \theta \in [0,2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) \text{ per } \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione $u(\rho,\theta)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo della trasformata di Fourier è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} f(y)\, dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulla condizione iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $t > 0$, confrontandola con la regolarità della condizione iniziale (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi. Nel rispondere, mettere in evidenza le *proprietà del nucleo del calore* che sono rilevanti.

3. Descrivere i principali problemi ai limiti e ai valori iniziali che si affrontano per l'equazione della corda vibrante (limitata, cioè sul segmento). Enunciare e dimostrare un risultato di unicità per i problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann per quest'equazione.

4. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti tra una funzione $H^1(\Omega)$ e una $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré e la sua conseguenza riguardo alla norma nello spazio $H_0^1(\Omega)$.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = \sin x \cos^3 x \text{ per } x \in (0,\pi) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \pi x - x^2 \text{ per } x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2022
Tema 2
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Dom 4	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. Enunciare e dimostrare il teorema sulla regolarità delle funzioni armoniche in n variabili, all'interno di un dominio, enunciando con precisione anche i risultati utilizzati nella dimostrazione, in particolare la formula integrale di Poisson per la sfera. (Limitarsi al caso $n \geq 3$).

2. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Utilizzando i metodi studiati nel corso, determinare (presentando in dettaglio il procedimento risolutivo):

a. una formula di rappresentazione esplicita per l'integrale generale dell'equazione;

b. una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione del problema di Cauchy, precisando le ipotesi su f, g sotto le quali u è soluzione classica del problema.

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo di separazione delle variabili è assegnata dalla formula:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ con}$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulla condizione iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale.

b. Discutere il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè: per $t \to +\infty$).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

4. Dare la formulazione debole del problema di Neumann con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + d(x) u = f \text{ in } \Omega,$$

(con $a(x)$ scalare) ricavandola dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari. Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert. La soluzione del problema risolve anche un problema di minimo di funzionale? Spiegare.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(\rho,\theta) = 0 & \text{per } \rho < 2, \theta \in [-\pi,\pi] \\ u(2,\theta) = |\sin\theta| & \text{per } \theta \in [-\pi,\pi]. \end{cases}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2022
Tema 3
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Dom 4	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. Enunciare e dimostrare il principio di massimo forte per funzioni armoniche in n variabili e, utilizzando questo, dimostrare la dipendenza continua della soluzione per il problema di Dirichlet (per l'equazione omogenea) e l'unicità (anche per l'equazione non omogenea) su un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$. Confrontare le ipotesi sotto cui si è dimostrata l'unicità con questo procedimento con le ipotesi sotto cui la si può dimostrare usando le identità di Green.

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione *non omogenea* del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = F(x,t) \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Ricordando che la soluzione del problema analogo per l'equazione *omogenea* (cioè con $F \equiv 0$), ottenuta col metodo della trasformata di Fourier, è assegnata (sotto opportune ipotesi) dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y)\, dy$$

determinare una formula risolutiva per il problema (1). Non si chiede di dimostrare la validità effettiva della formula trovata sotto opportune ipotesi, solo di determinare tale formula con *entrambi* i metodi visti nel corso (trasformata di Fourier e metodo di Duhamel), presentando i due procedimenti in dettaglio.

3. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy. \tag{2}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su g e h la u assegnata da (2) è una soluzione classica del problema.

b. Dimostrare una stima di stabilità per la soluzione del problema.

c. Spiegare i concetti di dominio di dipendenza e dominio di influenza.

4. Dare la definizione di soluzione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (\mathbf{A}(x)\nabla u(x)) + \underline{c}(x) \cdot \nabla u + d(x)\,u = f \text{ in } \Omega,$$

(con $\mathbf{A}(x)$ matrice simmetrica, $\underline{c}(x)$ vettore e $d(x)$ scalare, funzioni di x). Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert. Infine, mostrare come si modifica il procedimento nel caso in cui il dato al bordo non è zero.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \text{ per } x^2 + y^2 < 3 \\ u = x^2 y^2 \text{ per } x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ, θ) e poi di (x, y).

Esame di Metodi Analitici per le EDP Primo appello. Giugno 2022 Tema 4 A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Dom 4	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \ \text{ per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) \ \text{ per } x \in [0, L] \end{cases}$$

La soluzione del problema, ottenuta col metodo di separazione delle variabili, è assegnata formalmente dalla seguente formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\}, \text{ con:}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulle condizioni iniziali $f(x), g(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve il problema di Cauchy-Dirichlet precedente.

b. Discutere in dettaglio le proprietà delle singole funzioni $u_n(x,t)$, in relazione al significato fisico del fenomeno: che tipo di vibrazione rappresenta u_n e che significato hanno i vari parametri [parole chiave da toccare nella risposta: periodo, frequenza, ampiezza, pulsazione, stazionarietà, punti nodali].

c. Discutere che significato fisico ha il fatto che la soluzione u sia somma degli infiniti termini u [qualche parola chiave da toccare nella risposta: periodicità, frequenza fondamentale, armoniche].

2. Si consideri l'*equazione lineare del trasporto*, non omogenea:

$$u_t + vu_x = f(t,x) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

con v costante reale, f funzione assegnata, $u(x,t)$ funzione incognita. Dopo aver spiegato il significato fisico dell'equazione, determinare l'integrale generale di quest'equazione, utilizzando i metodi visti nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, precisando anche le ipotesi sotto le quali vale.

[Suggerimento: procedere per passi successivi, a cominciare dal caso $f = 0$].

3. Si consideri il nucleo del calore:

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} \text{ per } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^n, t < 0. \end{cases}$$

Dimostrare che risolve, nel senso delle distribuzioni $D'(\mathbb{R}^{n+1})$, l'equazione

$$K_t - D\Delta K = \delta_{(0,0)} \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dedurre da questo fatto un teorema di esistenza per il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f(x,t) \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

sotto ipotesi opportune su f.

4. Dare la definizione di derivata debole e di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$ e dimostrare che $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Enunciare poi il teorema di caratterizzazione dello spazio $H^1(a,b)$ (in una dimensione). Definire quindi gli spazi $H^m(\Omega)$ per $m = 2, 3, 4....$

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Neumann per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \text{ per } x^2 + y^2 < 2 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = xy^3 \text{ per } x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ, θ) e poi di (x, y).

Esame di Metodi Analitici per le EDP Primo appello. Giugno 2022 Svolgimento Tema 1 A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	6
Dom 2	7
Dom 3	7
Dom 4	6
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_{\rho}+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0 \text{ per } \rho\in(0,r)\,,\theta\in[0,2\pi] \\ u(r,\theta)=f(\theta) \text{ per } \theta\in[0,2\pi]\,. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione $u(\rho,\theta)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t-D\Delta u=0 \text{ per } t>0, x\in\mathbb{R}^n \\ u(x,0)=f(x) \text{ per } x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo della trasformata di Fourier è assegnata dalla formula:

$$u(x,t)=\frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}}f(y)\,dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulla condizione iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $t>0$, confrontandola con la regolarità della condizione iniziale (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi. Nel rispondere, mettere in evidenza le *proprietà del nucleo del calore* che sono rilevanti.

3. Descrivere i principali problemi ai limiti e ai valori iniziali che si affrontano per l'equazione della corda vibrante (limitata, cioè sul segmento). Enunciare e dimostrare un risultato di unicità per i problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann per quest'equazione.

4. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti tra una funzione $H^1(\Omega)$ e una $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré e la sua conseguenza riguardo alla norma nello spazio $H_0^1(\Omega)$.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = \sin x \cos^3 x \text{ per } x \in (0,\pi) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \pi x - x^2 \text{ per } x \in (0,\pi) \end{cases}$$

La soluzione è assegnata da:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left\{a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right\}.$$

Qui $L = \pi, c = 2$ perciò

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\left\{a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)\right\},$$

con

$$\sin x \cos^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$
$$\pi x - x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin(nx).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \sin x \cos^3 x &= \sin x \cos x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x. \\ a_2 &= \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{8}, a_n = 0 \text{ per gli altri } n. \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} 2nb_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi x - x^2\right)\sin(nx)\,dx \\ b_n &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi x - x^2\right)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}\left\{\left[-\left(\pi x - x^2\right)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(\pi - 2x)\frac{\cos(nx)}{n}dx\right\} \\ &= \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n^2\pi}\left\{\left[(\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\frac{\sin(nx)}{n}dx\right\} \\ &= \frac{2}{n^3\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{n^3\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n^4}\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^4} & \text{se } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}. \end{aligned}$$

In definitiva si ha:

$$\begin{aligned} u\left(x,t\right) &= \frac{1}{4}\sin 2x\cos\left(4t\right)+\frac{1}{8}\sin 4x\cos 8t+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(nx\right)\left(\frac{1-\cos n\pi}{n^4}\right)\sin\left(2nt\right) \\ &= \frac{1}{4}\sin 2x\cos\left(4t\right)+\frac{1}{8}\sin 4x\cos 8t+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\left(2k+1\right)x\right)}{\left(2k+1\right)^4}\sin\left(2\left(2k+1\right)t\right) \end{aligned}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Primo appello. Giugno 2022 Svolgimento Tema 2 A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	6
Dom 2	7
Dom 3	7
Dom 4	7
Esercizio	6
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. Enunciare e dimostrare il teorema sulla regolarità delle funzioni armoniche in n variabili, all'interno di un dominio, enunciando con precisione anche i risultati utilizzati nella dimostrazione, in particolare la formula integrale di Poisson per la sfera. (Limitarsi al caso $n \geq 3$).

2. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Utilizzando i metodi studiati nel corso, determinare (presentando in dettaglio il procedimento risolutivo):

a. una formula di rappresentazione esplicita per l'integrale generale dell'equazione;

b. una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione del problema di Cauchy, precisando le ipotesi su f, g sotto le quali u è soluzione classica del problema.

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L]\,. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo di separazione delle variabili è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ con}$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulla condizione iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale.

b. Discutere il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè: per $t \to +\infty$).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

4. Dare la formulazione debole del problema di Neumann con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + d(x) u = f \text{ in } \Omega,$$

(con $a(x)$ scalare) ricavandola dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari. Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert. La soluzione del problema risolve anche un problema di minimo di funzionale? Spiegare.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(\rho, \theta) = 0 & \text{per } \rho < 2, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u(2, \theta) = |\sin \theta| & \text{per } \theta \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Dobbiamo sviluppare in serie di Fourier il dato al bordo $f(\theta) = |\sin \theta|$ in $[-\pi, \pi]$. La funzione è pari, perciò

$$\begin{aligned} &\beta_n = 0, \\ &\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos(n\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{4}{\pi}. \\ \alpha_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta}{2} d\theta \\ &= (\text{purché } n \neq 1)\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta - 1}{n-1} \right] \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)\pi}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 + \cos n\pi}{1 - n^2} \right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \\ \alpha_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

Poiché $r = 2$, la soluzione è:

$$
\begin{aligned}
u(\rho, \theta) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \alpha_n \cos(n\theta) \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \left(\frac{1 + \cos(n\pi)}{n^2 - 1}\right) \cos(n\theta) \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{4k^2 - 1}\right) \cos(2k\theta).
\end{aligned}
$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2022
Svolgimento Tema 3
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	6
Dom 2	7
Dom 3	7
Dom 4	7
Esercizio	6
Tot.	33

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. Enunciare e dimostrare il principio di massimo forte per funzioni armoniche in n variabili e, utilizzando questo, dimostrare la dipendenza continua della soluzione per il problema di Dirichlet (per l'equazione omogenea) e l'unicità (anche per l'equazione non omogenea) su un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$. Confrontare le ipotesi sotto cui si è dimostrata l'unicità con questo procedimento con le ipotesi sotto cui la si può dimostrare usando le identità di Green.

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione *non omogenea* del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = F(x,t) \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3}$$

Ricordando che la soluzione del problema analogo per l'equazione *omogenea* (cioè con $F \equiv 0$), ottenuta col metodo della trasformata di Fourier, è assegnata (sotto opportune ipotesi) dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y)\, dy$$

determinare una formula risolutiva per il problema (3). Non si chiede di dimostrare la validità effettiva della formula trovata sotto opportune ipotesi, solo di determinare tale formula con *entrambi* i metodi visti nel corso (trasformata di Fourier e metodo di Duhamel), presentando i due procedimenti in dettaglio.

3. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy. \tag{4}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su g e h la u assegnata da (4) è una soluzione classica del problema.

b. Dimostrare una stima di stabilità per la soluzione del problema.

c. Spiegare i concetti di dominio di dipendenza e dominio di influenza.

4. Dare la definizione di soluzione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (\mathbf{A}(x) \nabla u(x)) + \underline{c}(x) \cdot \nabla u + d(x) u = f \text{ in } \Omega,$$

(con $\mathbf{A}(x)$ matrice simmetrica, $\underline{c}(x)$ vettore e $d(x)$ scalare, funzioni di x). Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert. Infine, mostrare come si modifica il procedimento nel caso in cui il dato al bordo non è zero.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \text{ per } x^2 + y^2 < 3 \\ u = x^2 y^2 \text{ per } x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ, θ) e poi di (x, y).

Anzitutto esprimiamo il dato al bordo in funzione di θ, cioè in coordinate polari per $\rho = \sqrt{3}$:

$$x^2 y^2 = \left(\sqrt{3}\cos\theta\right)^2 \left(\sqrt{3}\sin\theta\right)^2 = 9\cos^2\theta \sin^2\theta \equiv f(\theta).$$

Ora osserviamo che il dato al bordo è un polinomio trigonometrico, cioè può essere riscritto come somma di una serie di Fourier finita, usando le identità trigonometriche:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 9\cos^2\theta\sin^2\theta = 9\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\sin^2(2\theta) = \frac{9}{4}\left(\frac{1-\cos(4\theta)}{2}\right) \\ &= \frac{9}{8} - \frac{9}{8}\cos(4\theta). \end{aligned}$$

Quindi la soluzione è:

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) &= \frac{9}{8} - \frac{9}{8}\left(\frac{\rho}{\sqrt{3}}\right)^4 \cos(4\theta) \\ &= \frac{9}{8} - \frac{1}{8}\rho^4 \cos(4\theta), \end{aligned}$$

e può essere riscritta in coordinate cartesiane, osservando che

$$\begin{aligned}\rho^4 \cos(4\theta) &= \operatorname{Re}(x+iy)^4 = \operatorname{Re}\left[\left(\left(x^2-y^2\right)+2ixy\right)^2\right] \\ &= \left(x^2-y^2\right)^2 - 4x^2y^2 = x^4+y^4-6x^2y^2\end{aligned}$$

quindi

$$u(x,y) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8}\left(x^4+y^4-6x^2y^2\right).$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Primo appello. Giugno 2022 Svolgimento Tema 4 A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	6
Dom 2	7
Dom 3	7
Dom 4	6
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0,L] \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in [0,L] \end{cases}$$

La soluzione del problema, ottenuta col metodo di separazione delle variabili, è assegnata formalmente dalla seguente formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\}, \text{ con:}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulle condizioni iniziali $f(x), g(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve il problema di Cauchy-Dirichlet precedente.

b. Discutere in dettaglio le proprietà delle singole funzioni $u_n(x,t)$, in relazione al significato fisico del fenomeno: che tipo di vibrazione rappresenta u_n e che significato hanno i vari parametri [parole chiave da toccare nella risposta: periodo, frequenza, ampiezza, pulsazione, stazionarietà, punti nodali].

c. Discutere che significato fisico ha il fatto che la soluzione u sia somma degli infiniti termini u [qualche parola chiave da toccare nella risposta: periodicità, frequenza fondamentale, armoniche].

2. Si consideri l'*equazione lineare del trasporto*, non omogenea:

$$u_t + v u_x = f(t,x) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

con v costante reale, f funzione assegnata, $u(x,t)$ funzione incognita. Dopo aver spiegato il significato fisico dell'equazione, determinare l'integrale generale di quest'equazione, utilizzando i metodi visti nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, precisando anche le ipotesi sotto le quali vale.

[Suggerimento: procedere per passi successivi, a cominciare dal caso $f = 0$].

3. Si consideri il nucleo del calore:

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} \text{ per } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^n, t < 0. \end{cases}$$

Dimostrare che risolve, nel senso delle distribuzioni $D'\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$, l'equazione

$$K_t - D\Delta K = \delta_{(0,0)} \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dedurre da questo fatto un teorema di esistenza per il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f(x,t) \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

sotto ipotesi opportune su f.

4. Dare la definizione di derivata debole e di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$ e dimostrare che $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Enunciare poi il teorema di caratterizzazione dello spazio $H^1(a,b)$ (in una dimensione). Definire quindi gli spazi $H^m(\Omega)$ per $m = 2, 3, 4....$

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Neumann per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \text{ per } x^2 + y^2 < 2 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = xy^3 \text{ per } x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ, θ) e poi di (x, y).

Anzitutto esprimiamo il dato al bordo in funzione di θ, cioè in coordinate polari per $\rho = r = \sqrt{2}$:

$$xy^3 = \sqrt{2}\cos\theta\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)^3 = 4\cos\theta\sin^3\theta \equiv f(\theta).$$

Ora osserviamo che il dato al bordo è un polinomio trigonometrico, cioè può essere riscritto come somma di una serie di Fourier finita, usando le identità trigonometriche:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4\cos\theta\sin^3\theta = (2\cos\theta\sin\theta)\cdot 2\sin^2\theta = \sin(2\theta)\, 2\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right) \\ &= \sin(2\theta) - \sin(2\theta)\cos(2\theta) = \sin(2\theta) - \frac{1}{2}\sin(4\theta). \end{aligned}$$

La soluzione del problema di Neumann (a meno di costante additiva) è:

$$
\begin{aligned}
u(\rho,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)^{2}\sin(2\theta) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)^{4}\sin(4\theta) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\rho^{2}\sin(2\theta) - \frac{\sqrt{2}}{32}\rho^{4}\sin(4\theta).
\end{aligned}
$$

La soluzione può essere riscritta in coordinate cartesiane, osservando che

$$
\begin{aligned}
&\rho^{2}\sin(2\theta) = \operatorname{Im}(x+iy)^{2} = 2xy \\
&\rho^{4}\sin(4\theta) = \operatorname{Im}(x+iy)^{4} = \operatorname{Im}\left[\left(\left(x^{2}-y^{2}\right)+2ixy\right)^{2}\right] = 4xy\left(x^{2}-y^{2}\right)
\end{aligned}
$$

quindi

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{\sqrt{2}}{4}2xy - \frac{\sqrt{2}}{32}4xy\left(x^{2}-y^{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}xy\left(4-x^{2}+y^{2}\right).
\end{aligned}
$$