Esame di Metodi Analitici per le EDP
Terzo appello. Settembre 2022
Tema 1
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Dom 4	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

a. Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

Suggerimento: è utile la formula per la trasformata di Fourier della Gaussiana n-dimensionale. Posto

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, e^{-2\pi i x\xi} dx$$

si ha, per $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}.$$

b. Provare poi sotto quali ipotesi la funzione assegnata dalla formula risolutiva determinata in precedenza risolve effettivamente il problema di Cauchy.

2. Dimostrare che, per ogni $n \geq 3$,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n (n-2) |x|^{n-2}}$$

è una soluzione di $\Delta\Gamma = -\delta_0$ in $\mathbb{R}^n$, nel senso delle distribuzioni. (Se preferite, fatelo solo per $n = 3$, con $\omega_3 = 4\pi$).

Dedurre da questo risultato un teorema che consente di risolvere l'equazione di Poisson $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ sotto opportune ipotesi su f.

3. Scrivere il *problema agli autovalori per il laplaciano* su un dominio limitato e lipschitziano Ω di $\mathbb{R}^n$, con condizione di Dirichlet nulla al bordo, e dimostrare che gli eventuali autovalori sono negativi e che autofunzioni relative ad autovalori distinti sono ortogonali in $L^2(\Omega)$. Spiegare poi come interviene questo problema agli autovalori nella risoluzione di altri problemi per l'equazione delle onde.

4. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti tra una funzione $H^1(\Omega)$ e una $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré e la sua conseguenza riguardo alla norma nello spazio $H_0^1(\Omega)$.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione (non omogenea) della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\cos x \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 3 \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Precisare quindi che regolarità ha la soluzione.

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Terzo appello. Settembre 2022.
Tema 2
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Dom 4	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. Si consideri il seguente problema per l'equazione di diffusione sulla retta, con termini di trasporto e reazione:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} + vu_x + \gamma u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con $\gamma > 0$ e $v \in \mathbb{R}$. Determinare una formula risolutiva del problema, con uno dei metodi visti nel corso. (Se è utile, si può dare per nota, senza bisogno di ricavarla, la formula che assegna la soluzione nel caso $v = \gamma = 0$, cioè per l'equazione di sola diffusione).

[Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale].

Una volta ottenuta la formula risolutiva per questo problema, mostrare come da questa si deduce una formula risolutiva nel caso non omogeneo, cioè:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} + vu_x + \gamma u = f(x, t) \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Dopo aver dato la definizione di *funzione di Green* per il laplaciano su un dominio Ω e aver enunciato (senza dimostrazione) il "teorema dei tre potenziali" che consente di rappresentare una funzione u abbastanza regolare su Ω come somma di tre integrali, enunciare e dimostrare il teorema che consente di rappresentare una funzione regolare come somma di due integrali che coinvolgono la funzione di Green.

3. Scrivere il *problema agli autovalori per il laplaciano* su un dominio limitato e lipschitziano Ω di $\mathbb{R}^n$, con condizione di Dirichlet nulla al bordo, e dimostrare che gli eventuali autovalori sono negativi e che autofunzioni relative ad autovalori distinti sono ortogonali in $L^2(\Omega)$. Spiegare poi come interviene questo problema agli autovalori nella risoluzione di altri problemi per l'equazione del calore.

4. Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare e dimostrare il teorema che mette in relazione la soluzione di un problema variazionale astratto con un problema di minimizzazione di un opportuno funzionale.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione (non omogenea) della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{4} u_{xx} = e^x \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = xe^{-|x|} \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin(2x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Precisare quindi che regolarità ha la soluzione.

Esame di Metodi Analitici per le EDP Terzo appello. Settembre 2022 Svolgimento Tema 1 A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	7
Dom 2	7
Dom 3	7
Dom 4	6
Esercizio	6
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

a. Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

Suggerimento: è utile la formula per la trasformata di Fourier della Gaussiana n-dimensionale. Posto

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$$

si ha, per $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}.$$

b. Provare poi sotto quali ipotesi la funzione assegnata dalla formula risolutiva determinata in precedenza risolve effettivamente il problema di Cauchy.

2. Dimostrare che, per ogni $n \geq 3$,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n (n-2) |x|^{n-2}}$$

è una soluzione di $\Delta\Gamma = -\delta_0$ in $\mathbb{R}^n$, nel senso delle distribuzioni. (Se preferite, fatelo solo per $n = 3$, con $\omega_3 = 4\pi$).

Dedurre da questo risultato un teorema che consente di risolvere l'equazione di Poisson $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ sotto opportune ipotesi su f.

3. Scrivere il *problema agli autovalori per il laplaciano* su un dominio limitato e lipschitziano Ω di $\mathbb{R}^n$, con condizione di Dirichlet nulla al bordo, e dimostrare che gli eventuali autovalori sono negativi e che autofunzioni relative ad autovalori distinti sono ortogonali in $L^2(\Omega)$. Spiegare poi come interviene questo problema agli autovalori nella risoluzione di altri problemi per l'equazione delle onde.

4. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti tra una funzione $H^1(\Omega)$ e una $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré e la sua conseguenza riguardo alla norma nello spazio $H_0^1(\Omega)$.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione (non omogenea) della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\cos x \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 3 \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Precisare quindi che regolarità ha la soluzione.

Applicando la formula di D'Alembert e la formula per l'equazione non omogenea

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy + \int_0^t \left(\frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,dy\right) ds$$

con $c = 1, g(x) = e^{-x^2}$, $f(x,t) = t\cos x$ e $h(x) = 3$ si ha:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 3dy + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \cos y dy\right) sds \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + \frac{3}{2}\cdot 2t + \frac{1}{2}\int_0^t (\sin(x+t-s) - \sin(x-t+s))\, sds \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + 3t \\
&+ \frac{1}{2}\left\{[(\cos(x-t+s) + \cos(x+t-s))\, s]_0^t - \int_0^t (\cos(x-t+s) + \cos(x+t-s))\, ds\right\} \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + 3t \\
&+ \frac{1}{2}\left\{2t\cos x - \int_0^t (\cos(x-s) + \cos(x+s))\, ds\right\} \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + 3t \\
&+ t\cos x + \frac{1}{2}[\sin(x-s) - \sin(x+s)]_0^t \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + 3t + t\cos x + \frac{1}{2}[\sin(x-t) - \sin(x+t)] \\
&= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + 3t + t\cos x - \cos x \sin t.
\end{aligned}$$

La soluzione è infinitamente derivabile, come lo sono termine noto e condizioni iniziali.

Esame di Metodi Analitici per le EDP Terzo appello. Settembre 2022. Svolgimento Tema 2 A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	6
Dom 2	7
Dom 3	7
Dom 4	7
Esercizio	6
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. Si consideri il seguente problema per l'equazione di diffusione sulla retta, con termini di trasporto e reazione:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} + vu_x + \gamma u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con $\gamma > 0$ e $v \in \mathbb{R}$. Determinare una formula risolutiva del problema, con uno dei metodi visti nel corso. (Se è utile, si può dare per nota, senza bisogno di ricavarla, la formula che assegna la soluzione nel caso $v = \gamma = 0$, cioè per l'equazione di sola diffusione).

[Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale].

Una volta ottenuta la formula risolutiva per questo problema, mostrare come da questa si deduce una formula risolutiva nel caso non omogeneo, cioè:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} + vu_x + \gamma u = f(x,t) \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Dopo aver dato la definizione di *funzione di Green* per il laplaciano su un dominio Ω e aver enunciato (senza dimostrazione) il "teorema dei tre potenziali" che consente di rappresentare una funzione u abbastanza regolare su Ω come somma di tre integrali, enunciare e dimostrare il teorema che consente di rappresentare una funzione regolare come somma di due integrali che coinvolgono la funzione di Green.

3. Scrivere il *problema agli autovalori per il laplaciano* su un dominio limitato e lipschitziano Ω di $\mathbb{R}^n$, con condizione di Dirichlet nulla al bordo, e dimostrare che gli eventuali autovalori sono negativi e che autofunzioni relative ad autovalori distinti sono ortogonali in $L^2(\Omega)$. Spiegare poi come interviene questo problema agli autovalori nella risoluzione di altri problemi per l'equazione del calore.

4. Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare e dimostrare il teorema che mette in relazione la soluzione di un problema variazionale astratto con un problema di minimizzazione di un opportuno funzionale.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione (non omogenea) della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{4}u_{xx} = e^x \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = xe^{-|x|} \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin(2x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Precisare quindi che regolarità ha la soluzione.

Applicando la formula di D'Alembert e la formula per l'equazione non omogenea

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy + \int_0^t \left(\frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,dy\right) ds$$

con $c = \frac{1}{2}$, $g(x) = xe^{-|x|}$, $f(x,t) = e^x$ e $h(x) = \sin(2x)$ si ha:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\left(x+\frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x+\frac{1}{2}t\right|} + \left(x-\frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x-\frac{1}{2}t\right|}}{2} \\ &+ \int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} \sin(2y)\,dy + \int_0^t \left(\int_{x-\frac{1}{2}(t-s)}^{x+\frac{1}{2}(t-s)} e^y dy\right) ds. \end{aligned}$$

$$\int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} \sin(2y)\,dy = \left[-\frac{1}{2}\cos(2y)\right]_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}\left(\cos(2x-t) - \cos(2x+t)\right).$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_{x-\frac{1}{2}(t-s)}^{x+\frac{1}{2}(t-s)} e^y dy\right) ds &= \int_0^t \left(e^{x+\frac{1}{2}(t-s)} - e^{x-\frac{1}{2}(t-s)}\right) ds = e^x \int_0^t \left(e^{\frac{1}{2}s} - e^{-\frac{1}{2}s}\right) ds \\ &= e^x \left[2e^{\frac{1}{2}s} + 2e^{-\frac{1}{2}s}\right]_0^t = 2e^x\left(e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t} - 2\right) = 4e^x\left(\mathrm{Ch}\left(\frac{t}{2}\right) - 1\right). \end{aligned}$$

In definitiva,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\left(x+\frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x+\frac{1}{2}t\right|} + \left(x-\frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x-\frac{1}{2}t\right|}}{2} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\cos(2x-t) - \cos(2x+t)\right) \\ &+ 4e^x\left(\mathrm{Ch}\left(\frac{t}{2}\right) - 1\right) \\ &= \frac{\left(x+\frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x+\frac{1}{2}t\right|} + \left(x-\frac{1}{2}t\right)e^{-\left|x-\frac{1}{2}t\right|}}{2} \\ &+ \sin(2x)\sin t + 2e^{x+\frac{t}{2}} + 2e^{x-\frac{t}{2}} - 4e^x. \end{aligned}$$

La soluzione è C^1 ma non C^2, come lo è il dato iniziale $g(x) = xe^{-|x|}$.

Conversione del punteggio (espresso in scala 0-33)
in voto (espresso in trentesimi):

Punti	Voto
33	30 e lode
32	30
31 o 30	29
29 o 28	28
punti ≤ 27	voto=punti.