Esame di Metodi Analitici per le EDP Quarto appello. Gennaio 2023 Tema 1 A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Dom 4	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. Dedurre l'equazione di diffusione del calore in un mezzo continuo, non necessariamente omogeneo, in presenza di termini di sorgente, spiegando i passaggi della deduzione e il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta. (La funzione u incognita rappresenta la temperatura).

Quindi presentare (senza farne la deduzione) l'equazione di diffusione di una sostanza in un mezzo continuo (la funzione u incognita rappresenta la concentrazione), in presenza di termini di sorgente, termini di trasporto e reazione, spiegando il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta.

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in [0, L] \end{cases}$$

a. Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione**.**

b. Dimostrare sotto quali ipotesi sulle condizioni iniziali $f(x), g(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve il problema di Cauchy-Dirichlet precedente.

3. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f(x,t) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v costante reale, f e g assegnate. La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s)\, ds. \tag{1}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su f e g la u assegnata da (1) è una soluzione classica del problema.

b. Si definisca il concetto di *soluzione debole* dell'equazione e si dimostri che una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

c. Si dimostri sotto quali ipotesi la u assegnata dalla (1) è soluzione debole del problema. [E' sufficiente dimostrarlo nel caso $f = 0$].

4. Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare e dimostrare il *teorema di Lax-Milgram*, richiamando le definizioni dei vari concetti coinvolti.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sulla sbarra finita, dopo aver previsto in base alla teoria in che senso sarà assunto il dato iniziale:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), t > 0 \\ u(0,t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = x \cos x \end{cases}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Quarto appello. Gennaio 2023 Svolgimento Tema 1 A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	6
Dom 2	7
Dom 3	6
Dom 4	7
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. Dedurre l'equazione di diffusione del calore in un mezzo continuo, non necessariamente omogeneo, in presenza di termini di sorgente, spiegando i passaggi della deduzione e il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta. (La funzione u incognita rappresenta la temperatura).

Quindi presentare (senza farne la deduzione) l'equazione di diffusione di una sostanza in un mezzo continuo (la funzione u incognita rappresenta la concentrazione), in presenza di termini di sorgente, termini di trasporto e reazione, spiegando il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta.

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in [0, L] \end{cases}$$

a. Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione.

b. Dimostrare sotto quali ipotesi sulle condizioni iniziali $f(x), g(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve il problema di Cauchy-Dirichlet precedente.

3. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f(x,t) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v costante reale, f e g assegnate. La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s)\, ds. \tag{2}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su f e g la u assegnata da (2) è una soluzione classica del problema.

b. Si definisca il concetto di *soluzione debole* dell'equazione e si dimostri che una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

c. Si dimostri sotto quali ipotesi la u assegnata dalla (2) è soluzione debole del problema. [E' sufficiente dimostrarlo nel caso $f = 0$].

4. Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare e dimostrare il *teorema di Lax-Milgram*, richiamando le definizioni dei vari concetti coinvolti.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sulla sbarra finita, dopo aver previsto in base alla teoria in che senso sarà assunto il dato iniziale:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), t > 0 \\ u(0,t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = x \cos x \end{cases}$$

Poiché il dato iniziale $f(x) = x \cos x$ è una funzione continua, regolare e rispetta la condizione di raccordo $f(0) = f(\pi) = 0$, il dato iniziale sarà assunto come limite uniforme, oltre che L^2.

La soluzione è data da:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

con $L = \dfrac{\pi}{2}, D = 4$, quindi:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-16n^2 t} b_n \sin(2nx)$$

con

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \cos x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x \cos x \sin(2nx)\, dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x \frac{1}{2}\left\{\sin[(2n+1)x] + \sin[(2n-1)x]\right\} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-x \left\{ \frac{\cos\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)} + \frac{\cos\left[(2n-1)\,x\right]}{(2n-1)} \right\} \right]_0^{\pi/2} \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{\cos\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)} + \frac{\cos\left[(2n-1)\,x\right]}{(2n-1)} \right\} dx \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ 0 + \left[\frac{\sin\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)^2} + \frac{\sin\left[(2n-1)\,x\right]}{(2n-1)^2} \right]_0^{\pi/2} \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{(2n+1)^2} + \frac{\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)^2} \right\} = \frac{2}{\pi} (-1)^n \left\{ \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2} \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} (-1)^n \left\{ \frac{-8n}{(4n^2-1)^2} \right\} = \frac{16}{\pi} (-1)^{n+1} \frac{n}{(4n^2-1)^2}$$

$$u(x,t) = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-16n^2 t} (-1)^{n+1} \frac{n}{(4n^2-1)^2} \sin(2nx)\,.$$