Esame di Metodi Analitici per le EDP
Quinto appello. Febbraio 2023
Tema 2
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Dom 4	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. Per l'equazione di Poisson, illustrare i vari *problemi al contorno* che si possono studiare, spiegando qualche loro possibile significato fisico. Quindi enunciare e dimostrare (mediante le identità di Green) un *risultato di unicità* per alcuni di questi problemi, precisando le ipotesi su soluzione e dominio. Mostrare anche come si ricavano, a partire dal teorema della divergenza, le identità di Green utilizzate.

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

3. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy. \tag{1}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su g e h la u assegnata da (1) è una soluzione classica del problema.

b. Dimostrare una stima di stabilità per la soluzione del problema.

c. Spiegare i concetti di dominio di dipendenza e dominio di influenza.

4. Dare la definizione di derivata debole di una funzione, in una o più variabili, e confrontare questa nozione con quella di derivata distribuzionale. Dare la definizione di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$. Fare esempi di funzioni discontinue che appartengono o non appartengono a spazi $H^1(\Omega)$, in dimensione opportuna.

Svolgere il seguente esercizio:

5. Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \text{ per } x^2 + y^2 < 5 \\ u = x^2 y - 3xy^2 \text{ per } x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ, θ) e poi di (x, y).

Esame di Metodi Analitici per le EDP Quinto appello. Febbraio 2023 Svolgimento Tema 2 A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	6
Dom 2	6
Dom 3	7
Dom 4	7
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. Per l'equazione di Poisson, illustrare i vari *problemi al contorno* che si possono studiare, spiegando qualche loro possibile significato fisico. Quindi enunciare e dimostrare (mediante le identità di Green) un *risultato di unicità* per alcuni di questi problemi, precisando le ipotesi su soluzione e dominio. Mostrare anche come si ricavano, a partire dal teorema della divergenza, le identità di Green utilizzate.

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

3. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy. \tag{2}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su g e h la u assegnata da (2) è una soluzione classica del problema.

b. Dimostrare una stima di stabilità per la soluzione del problema.

c. Spiegare i concetti di dominio di dipendenza e dominio di influenza.

4. Dare la definizione di derivata debole di una funzione, in una o più variabili, e confrontare questa nozione con quella di derivata distribuzionale. Dare la definizione di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$. Fare esempi di funzioni discontinue che appartengono o non appartengono a spazi $H^1(\Omega)$, in dimensione opportuna.

Svolgere il seguente esercizio:
5. Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \text{ per } x^2+y^2<5 \\ u = x^2y - 3xy^2 \text{ per } x^2+y^2=5 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ,θ) e poi di (x,y).

Anzitutto esprimiamo il dato al bordo in funzione di θ, cioè in coordinate polari per $\rho=\sqrt{5}$:

$$x^2y - 3xy^2 = 5\sqrt{5}\left(\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) \equiv f(\theta).$$

Ora osserviamo che il dato al bordo è un polinomio trigonometrico, cioè può essere riscritto come somma di una serie di Fourier finita, usando le identità trigonometriche:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 5\sqrt{5}\cos\theta\sin\theta(\cos\theta - 3\sin\theta) = \frac{5\sqrt{5}}{2}\{\sin(2\theta)\cos\theta - 3\sin(2\theta)\sin\theta\} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{4}\{\sin(3\theta) + \sin\theta + 3\cos(3\theta) - 3\cos\theta\}. \end{aligned}$$

Quindi la soluzione è:

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) &= \frac{5\sqrt{5}}{4}\left\{\left(\frac{\rho}{\sqrt{5}}\right)(\sin\theta - 3\cos\theta) + \left(\frac{\rho}{\sqrt{5}}\right)^3(3\cos(3\theta)+\sin(3\theta))\right\} \\ &= \frac{5}{4}(\rho\sin\theta - 3\rho\cos\theta) + \frac{1}{4}\left(3\rho^3\cos(3\theta) + \rho^3\sin(3\theta)\right). \end{aligned}$$

Riscriviamola in coordinate cartesiane

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{5}{4}(y-3x) + \frac{1}{4}\left(3\,\mathrm{Re}\,(x+iy)^3 + \mathrm{Im}\,(x+iy)^3\right) \\ &= \frac{5}{4}(y-3x) + \frac{1}{4}\left(3\left(x^3-3xy^2\right) + \left(3x^2y - y^3\right)\right) \\ &= \frac{5}{4}y - \frac{15}{4}x + \frac{1}{4}\left(3x^2y - y^3 + 3x^3 - 9xy^2\right). \end{aligned}$$