Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2023
Tema 1
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media per funzioni armoniche in n variabili. Quindi enunciare, senza dimostrazione, il teorema sulle funzioni armoniche che è stato dimostrato come immediata conseguenza del teorema della media.

2. (9 punti) Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Utilizzando i metodi studiati nel corso, determinare (presentando in dettaglio il procedimento risolutivo):

a. una formula di rappresentazione esplicita per l'integrale generale dell'equazione;

b. una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione del problema di Cauchy, precisando le ipotesi su f, g sotto le quali u è soluzione classica del problema.

3. (9 punti) Dare la la definizione di soluzione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + d(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega,$$

(con $a(x), d(x)$ funzioni scalari di x) mostrando come la formulazione debole del problema si ricava dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari. Quindi enunciare con precisione e dimostrare un risultato di buona posizione del problema in senso debole. La soluzione del problema risolve anche un problema di minimo di funzionale? Spiegare, enunciando (senza dimostrazione) un risultato in questa direzione.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{4}u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = x \cos x \end{cases}$$

Prevedere in base alla teoria il valore della temperatura limite per tempi lunghi, prima di risolvere il problema.

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2023
Tema 2
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. (9 punti) Scrivere il *problema agli autovalori per il laplaciano* su un dominio limitato e lipschitziano Ω di $\mathbb{R}^n$, con condizione di Dirichlet nulla al bordo, e dimostrare che gli eventuali autovalori sono negativi e che autofunzioni relative ad autovalori distinti sono ortogonali in $L^2(\Omega)$. Spiegare poi come interviene questo problema agli autovalori nella risoluzione di altri problemi per l'equazione del calore o delle onde (si richiede di impostare la risoluzione di un opportuno problema ai limiti e procedere fino al punto in cui nasce la necessità di risolvere il problema agli autovalori per il laplaciano).

3. (8 punti) Dare la definizione di derivata debole di una funzione, in una o più variabili, e confrontare questa nozione con quella di derivata distribuzionale. Dare la definizione di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$. Fare esempi di funzioni discontinue che appartengono o non appartengono a spazi $H^1(\Omega)$, in dimensione opportuna.

Svolgere il seguente esercizio:
4. (7 punti) Risolvere il problema di Neumann per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u\,(\rho,\theta) = 0 & \text{per } \rho < 2, \theta \in [-\pi,\pi] \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\,(2,\theta) = \theta\,|\theta| + 2\theta & \text{per } \theta \in [-\pi,\pi] \end{cases}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Primo appello. Giugno 2023 Tema 3 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 \text{ per } \rho \in (0,r), \theta \in [0, 2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) \text{ per } \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione $u(\rho,\theta)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. (8 punti) Dedurre l'equazione di diffusione del calore in un mezzo continuo, non necessariamente omogeneo, in presenza di termini di sorgente, spiegando i passaggi della deduzione e il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta. (La funzione u incognita rappresenta la temperatura).

Quindi presentare (senza farne la deduzione) l'equazione di diffusione di una sostanza in un mezzo continuo (la funzione u incognita rappresenta la concentrazione), in presenza di termini di sorgente, termini di trasporto e reazione, spiegando il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta.

3.(9 punti) Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy. \tag{1}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su g e h la u assegnata da (1) è una soluzione classica del problema.

b. Dimostrare una stima di stabilità per la soluzione del problema.

Svolgere il seguente esercizio:

4.(7 punti) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto con termine di sorgente:

$$\begin{cases} u_t - u_x = \frac{t}{1+x^2} \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ \\ u\left(x, 0\right) = \frac{1}{1+x^4} \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2023
Tema 4
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 \text{ per } \rho \in (0,r), \theta \in [0, 2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) \text{ per } \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

La soluzione è assegnata formalmente dalla formula integrale di Poisson,

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left\{ \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta - s) + \rho^2} \right\} ds.$$

Dimostrare che per ogni $f \in C^0[0,2\pi], f(0) = f(2\pi)$, la funzione $u(\rho,\theta)$ assegnata da questa formula tende a $f(\theta)$ per $\rho \to r^-$. Dire poi sotto quali ipotesi si può affermare che questa u è regolare e armonica all'interno del cerchio, giustificando l'affermazione.

2. (8 punti) Enunciare e dimostrare il principio di massimo debole per l'equazione del calore e mostrare come da questo si deduce un risultato di unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet su un dominio opportuno.

3. (9 punti) Si consideri l'*equazione lineare del trasporto*, non omogenea, con termine di reazione:

$$u_t + v u_x + \gamma u = f(t,x) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

con v, γ costanti reali, $\gamma > 0$, f funzione assegnata, $u(x,t)$ funzione incognita. Dopo aver spiegato il significato fisico dell'equazione e dei vari termini in essa presenti, determinare l'integrale generale di quest'equazione, utilizzando i metodi visti nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione.

[Suggerimento: procedere per passi successivi, a cominciare dal caso $f = 0, \gamma = 0$].

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u\,(x,0) = \cos x \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t\,(x,0) = \sin^2 x \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

riscrivendo la soluzione nella forma il più possibile semplificata. Per tempi lunghi la soluzione è limitata?

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2023
Svolgimento Tema 1
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	8
Dom 2	9
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media per funzioni armoniche in n variabili. Quindi enunciare, senza dimostrazione, il teorema sulle funzioni armoniche che è stato dimostrato come immediata conseguenza del teorema della media.

2. (9 punti) Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Utilizzando i metodi studiati nel corso, determinare (presentando in dettaglio il procedimento risolutivo):

a. una formula di rappresentazione esplicita per l'integrale generale dell'equazione;

b. una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione del problema di Cauchy, precisando le ipotesi su f, g sotto le quali u è soluzione classica del problema.

3. (9 punti) Dare la la definizione di soluzione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + d(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega,$$

(con $a(x), d(x)$ funzioni scalari di x) mostrando come la formulazione debole del problema si ricava dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari. Quindi enunciare con precisione e dimostrare un risultato di buona posizione del problema in senso debole. La soluzione del problema risolve anche un problema di minimo di funzionale? Spiegare, enunciando (senza dimostrazione) un risultato in questa direzione.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{4}u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = x\cos x \end{cases}$$

Prevedere in base alla teoria il valore della temperatura limite per tempi lunghi, prima di risolvere il problema.

La soluzione è data da:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$(D = \frac{1}{4}, L = \frac{\pi}{2})$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} a_n \cos(2nx)$$

con

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\cos(2nx)\,dx$$

e per $t \to +\infty$,

$$u(t,x) \to \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \frac{2}{\pi}\left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\cos(2nx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\frac{1}{2}\left\{\cos\left[(2n+1)x\right] + \cos\left[(2n-1)x\right]\right\}dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[x\left\{\frac{\sin\left[(2n+1)x\right]}{(2n+1)} + \frac{\sin\left[(2n-1)x\right]}{(2n-1)}\right\}\right]_0^{\pi/2}\right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi/2}\left\{\frac{\sin\left[(2n+1)x\right]}{(2n+1)} + \frac{\sin\left[(2n-1)x\right]}{(2n-1)}\right\}dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n+1)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)}{(2n-1)}\right) + \left[\frac{\cos\left[(2n+1)x\right]}{(2n+1)^2} + \frac{\cos\left[(2n-1)x\right]}{(2n-1)^2}\right]_0^{\pi/2}\right\}$$

$$= (-1)^n\left(\frac{1}{(2n+1)} - \frac{1}{(2n-1)}\right) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\right)$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{8n^2+2}{(4n^2-1)^2}\right) = 2\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}\right)\right\}.$$

$$u\left(x,t\right)=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2t}\left\{\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\left(4n^2-1\right)}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{4n^2+1}{\left(4n^2-1\right)^2}\right)\right\}\cos\left(2nx\right).$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Primo appello. Giugno 2023 Svolgimento Tema 2 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	9
Dom 3	8
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. (9 punti) Scrivere il *problema agli autovalori per il laplaciano* su un dominio limitato e lipschitziano Ω di $\mathbb{R}^n$, con condizione di Dirichlet nulla al bordo, e dimostrare che gli eventuali autovalori sono negativi e che autofunzioni relative ad autovalori distinti sono ortogonali in $L^2(\Omega)$. Spiegare poi come interviene questo problema agli autovalori nella risoluzione di altri problemi per l'equazione del calore o delle onde (si richiede di impostare la risoluzione di un opportuno problema ai limiti e procedere fino al punto in cui nasce la necessità di risolvere il problema agli autovalori per il laplaciano).

3. **(8 punti)** Dare la definizione di derivata debole di una funzione, in una o più variabili, e confrontare questa nozione con quella di derivata distribuzionale. Dare la definizione di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$. Fare esempi di funzioni discontinue che appartengono o non appartengono a spazi $H^1(\Omega)$, in dimensione opportuna.

Svolgere il seguente esercizio:
4. (7 punti) Risolvere il problema di Neumann per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(\rho,\theta) = 0 & \text{per } \rho < 2, \theta \in [-\pi,\pi] \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(2,\theta) = \theta\,|\theta| + 2\theta & \text{per } \theta \in [-\pi,\pi] \end{cases}$$

Sia

$$f(\theta) = \theta\,|\theta| + 2\theta \text{ in } [-\pi,\pi]$$

e calcoliamone i coefficienti di Fourier. Poiché f è *dispari* su $[-\pi,\pi]$ si ha:

$$a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\theta^2 + 2\theta\right)\sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-2 + \left(2 - \pi(2+\pi)n^2\right)\cos(n\pi)}{n^3}\right)$$

La formula che assegna la soluzione del problema di Neumann è

$$u(\rho,\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta\right)$$

dove i coefficienti α_n, β_n vanno scelti in modo che la derivata rispetto a ρ sul bordo (per $\rho = r = 2$) coincida col dato, quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\rho}u(\rho,\theta)_{/\rho=2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}\left(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta\right)_{/\rho=2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}\left(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta\right) = f(\theta), \end{aligned}$$

perciò la relazione tra α_n, β_n e i coefficienti di Fourier a_n, b_n di f è:

$$\begin{aligned} n2^{n-1}\alpha_n &= a_n \\ n2^{n-1}\beta_n &= b_n \end{aligned}$$

con la condizione necessaria $a_0 = 0$ (condizione di compatibilità), e u determinata a meno della costante additiva α_0. Quindi

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 0 \\ \beta_n &= \frac{2}{\pi n 2^{n-1}}\left(\frac{-2 + \left(2 - \pi(2+\pi)n^2\right)\cos(n\pi)}{n^3}\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{-2 + \left(2 - \pi(2+\pi)n^2\right)\cos(n\pi)}{2^n n^4}\right) \end{aligned}$$

$$u(\rho,\theta) = \alpha_0 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(\frac{-2 + \left(2 - \pi(2+\pi)n^2\right)\cos(n\pi)}{2^n n^4}\right)\sin n\theta$$

con α_0 indeterminata.

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Primo appello. Giugno 2023
Svolgimento Tema 3
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0 \text{ per } \rho \in (0,r), \theta \in [0,2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) \text{ per } \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione $u(\rho,\theta)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. (8 punti) Dedurre l'equazione di diffusione del calore in un mezzo continuo, non necessariamente omogeneo, in presenza di termini di sorgente, spiegando i passaggi della deduzione e il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta. (La funzione u incognita rappresenta la temperatura).

Quindi presentare (senza farne la deduzione) l'equazione di diffusione di una sostanza in un mezzo continuo (la funzione u incognita rappresenta la concentrazione), in presenza di termini di sorgente, termini di trasporto e reazione, spiegando il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta.

3. (9 punti) Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy. \tag{2}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su g e h la u assegnata da (2) è una soluzione classica del problema.

b. Dimostrare una stima di stabilità per la soluzione del problema.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto con termine di sorgente:

$$\begin{cases} u_t - u_x = \frac{t}{1+x^2} \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^4} \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione è assegnata da:

$$u(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s)\, ds$$

$$\text{con } g(x) = \frac{1}{1+x^4},\, f(x,t) = \frac{t}{1+x^2},\, v = -1$$

$$u(x,t) = \frac{1}{1+(x+t)^4} + \int_0^t \frac{s}{1+(x+t-s)^2} ds$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{s}{1+(x+t-s)^2} ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2s - 2(x+t)}{s^2 - 2s(x+t) + (x+t)^2 + 1} ds + (x+t)\int_0^t \frac{ds}{1+(x+t-s)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\log\left(1+(x+t-s)^2\right)\right]_0^t + (x+t)\left[-\arctan(x+t-s)\right]_0^t \\
&= \frac{1}{2}\left[\log\left(1+x^2\right) - \log\left(1+(x+t)^2\right)\right] + (x+t)\left[\arctan(x+t) - \arctan x\right]
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
u(x,t) = {} & \frac{1}{1+(x+t)^4} + \frac{1}{2}\left[\log\left(1+x^2\right) - \log\left(1+(x+t)^2\right)\right] \\
& + (x+t)\left[\arctan(x+t) - \arctan x\right].
\end{aligned}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Primo appello. Giugno 2023 Svolgimento Tema 4 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 \text{ per } \rho \in (0,r), \theta \in [0,2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) \text{ per } \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

La soluzione è assegnata formalmente dalla formula integrale di Poisson,

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left\{ \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta - s) + \rho^2} \right\} ds.$$

Dimostrare che per ogni $f \in C^0[0,2\pi], f(0) = f(2\pi)$, la funzione $u(\rho,\theta)$ assegnata da questa formula tende a $f(\theta)$ per $\rho \to r^-$. Dire poi sotto quali ipotesi si può affermare che questa u è regolare e armonica all'interno del cerchio, giustificando l'affermazione.

2. (8 punti) Enunciare e dimostrare il principio di massimo debole per l'equazione del calore e mostrare come da questo si deduce un risultato di unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet su un dominio opportuno.

3. (9 punti) Si consideri l'*equazione lineare del trasporto*, non omogenea, con termine di reazione:

$$u_t + vu_x + \gamma u = f(t,x) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

con v, γ costanti reali, $\gamma > 0$, f funzione assegnata, $u(x,t)$ funzione incognita. Dopo aver spiegato il significato fisico dell'equazione e dei vari termini in essa presenti, determinare l'integrale generale di quest'equazione, utilizzando i metodi visti nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione.

[Suggerimento: procedere per passi successivi, a cominciare dal caso $f = 0, \gamma = 0$].

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \cos x \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin^2 x \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

riscrivendo la soluzione nella forma il più possibile semplificata. Per tempi lunghi la soluzione è limitata?

La soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \cos x \equiv g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin^2 x \equiv h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

in base alla formula di D'Alembert è

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy$$

$(c = 3)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g(x+3t) + g(x-3t)}{2} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} h(y)\,dy \\
&= \frac{\cos(x+3t) + \cos(x-3t)}{2} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \sin^2 y dy \\
&= \cos x \cos 3t + \frac{1}{6}\left[\frac{y - \sin y \cos y}{2}\right]_{x-3t}^{x+3t} \\
&= \cos x \cos 3t + \frac{t}{2} - \frac{1}{12}\left[\frac{\sin(2x+6t) - \sin(2x-6t)}{2}\right] \\
&= \cos x \cos 3t + \frac{t}{2} - \frac{1}{12}\cos(2x)\sin(6t).
\end{aligned}$$

La soluzione è somma di funzioni trigonometriche limitate più il termine $t/2$, illimitato, perciò è *illimitata* per tempi lunghi.