Esame di Metodi Analitici per le EDP
Secondo appello. Luglio 2023
Tema 1
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Dopo aver enunciato (senza dimostrazione) il teorema della media per funzioni armoniche in n variabili, enunciare e dimostrare il suo teorema inverso, precisando i risultati che si utilizzano nella dimostrazione.

2. (9 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in [0, L] \end{cases}$$

La soluzione del problema, ottenuta col metodo di separazione delle variabili, è assegnata formalmente dalla seguente formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\}, \text{ con:}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulle condizioni iniziali $f(x), g(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve il problema di Cauchy-Dirichlet precedente.

b. Discutere in dettaglio le proprietà delle singole funzioni $u_n(x,t)$, in relazione al significato fisico del fenomeno: che tipo di vibrazione rappresenta u_n e che significato hanno i vari parametri [parole chiave da toccare nella risposta: periodo, frequenza, ampiezza, pulsazione, stazionarietà, punti nodali].

c. Discutere che significato fisico ha il fatto che la soluzione u sia somma degli infiniti termini u [qualche parola chiave da toccare nella risposta: periodicità, frequenza fondamentale, armoniche].

3. **(9 punti)** Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare e dimostrare il teorema che mette in relazione la soluzione di un problema variazionale astratto con un problema di minimizzazione di un opportuno funzionale.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,2)\,, t > 0 \\ u\,(0,t) = u\,(2,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u\,(x,0) = \begin{cases} x \text{ per } x \in (0,1) \\ 1 \text{ per } x \in (1,2)\,. \end{cases} \end{cases}$$

In base alla teoria, in questo caso, in quale senso si può prevedere che sarà assunta la condizione iniziale?

Esame di Metodi Analitici per le EDP Secondo appello. Luglio 2023 Tema 2 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo della trasformata di Fourier è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} f(y)\, dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulla condizione iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $t > 0$, confrontandola con la regolarità della condizione iniziale (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

c. Discutere, sotto opportune ipotesi, il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè: per $t \to +\infty$).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

2. (8 punti) Dedurre l'*equazione della corda vibrante*, in presenza di una forza esterna, precisando le ipotesi fisiche sotto cui vale.

Dedurre poi l'espressione integrale dell'energia meccanica totale di un segmento $[0, L]$ della corda vibrante, in assenza di forze esterne.

3. (9 punti) Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti tra una funzione $H^1(\Omega)$ e una $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré e la sua conseguenza riguardo alla norma nello spazio $H_0^1(\Omega)$.

Svolgere il seguente esercizio:
4. (7 punti) Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u\,(x,y) = 0 & \text{per } x^2 + y^2 < 2 \\ u\,(x,y) = x^4 - y^4 + 3y & \text{per } x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ, θ) e poi di (x, y).

Esame di Metodi Analitici per le EDP Secondo appello. Luglio 2023 Svolgimento Tema 1 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	8
Dom 2	9
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Dopo aver enunciato (senza dimostrazione) il teorema della media per funzioni armoniche in n variabili, enunciare e dimostrare il suo teorema inverso, precisando i risultati che si utilizzano nella dimostrazione.

2. (9 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in [0, L] \end{cases}$$

La soluzione del problema, ottenuta col metodo di separazione delle variabili, è assegnata formalmente dalla seguente formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left\{a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right\}, \text{ con:}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulle condizioni iniziali $f(x), g(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve il problema di Cauchy-Dirichlet precedente.

b. Discutere in dettaglio le proprietà delle singole funzioni $u_n(x,t)$, in relazione al significato fisico del fenomeno: che tipo di vibrazione rappresenta u_n e che significato hanno i vari parametri [parole chiave da toccare nella risposta: periodo, frequenza, ampiezza, pulsazione, stazionarietà, punti nodali].

c. Discutere che significato fisico ha il fatto che la soluzione u sia somma degli infiniti termini u [qualche parola chiave da toccare nella risposta: periodicità, frequenza fondamentale, armoniche].

3. **(9 punti)** Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare e dimostrare il teorema che mette in relazione la soluzione di un problema variazionale astratto con un problema di minimizzazione di un opportuno funzionale.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,2)\,, t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x \text{ per } x \in (0,1) \\ 1 \text{ per } x \in (1,2)\,. \end{cases} \end{cases}$$

In base alla teoria, in questo caso, in quale senso si può prevedere che sarà assunta la condizione iniziale?

Poiché il dato iniziale $f(x) = \begin{cases} x \text{ per } x \in (0,1) \\ 1 \text{ per } x \in (1,2) \end{cases}$ non rispetta la condizione di raccordo $f(0) = f(2) = 0$, il limite non sarà uniforme. La condizione iniziale sarà assunta puntualmente (non uniformemente) in $(0,1)$ e sarà assunta in senso $L^2(0,1)$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &(L = 2, D = 3) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}n^2\pi^2 t} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\ &\text{con} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^1 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\ &= \frac{-2n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2} + \frac{2\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)}{n\pi} \\ &= \frac{4\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2} - \frac{2\cos(n\pi)}{n\pi}. \end{aligned}$$

Quindi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}n^2\pi^2 t}\left\{\frac{4\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2} - \frac{2\cos(n\pi)}{n\pi}\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Secondo appello. Luglio 2023 Svolgimento Tema 2 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo della trasformata di Fourier è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} f(y)\, dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulla condizione iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $t > 0$, confrontandola con la regolarità della condizione iniziale (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

c. Discutere, sotto opportune ipotesi, il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè: per $t \to +\infty$).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

2. (8 punti) Dedurre l'*equazione della corda vibrante*, in presenza di una forza esterna, precisando le ipotesi fisiche sotto cui vale.

Dedurre poi l'espressione integrale dell'energia meccanica totale di un segmento $[0, L]$ della corda vibrante, in assenza di forze esterne.

3. (9 punti) Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti tra una funzione $H^1(\Omega)$ e una $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré e la sua conseguenza riguardo alla norma nello spazio $H_0^1(\Omega)$.

Svolgere il seguente esercizio:
4. (7 punti) Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u\,(x,y) = 0 & \text{per } x^2+y^2<2 \\ u\,(x,y) = x^4-y^4+3y & \text{per } x^2+y^2=2 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di (ρ,θ) e poi di (x,y).

$r=\sqrt{2}$; il dato al bordo è:

$$x^4-y^4+3y=\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)+3y=2\left(x^2-y^2\right)+3y$$

ponendo $x=\sqrt{2}\cos\theta, y=\sqrt{2}\sin\theta$

$$=2\left(2\cos^2\theta-2\sin^2\theta\right)+3\sqrt{2}\sin\theta=4\cos 2\theta+3\sqrt{2}\sin\theta\equiv f\,(\theta)\,.$$

La soluzione quindi è:

$$\begin{aligned} u\,(\rho,\theta) &= 3\sqrt{2}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\sin\theta+4\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)^2\cos 2\theta \\ &= 3\rho\sin\theta+2\rho^2\cos 2\theta \end{aligned}$$

e in coordinate cartesiane si riscrive:

$$u\,(x,y)=3y+2\,\mathrm{Re}\left((x+iy)^2\right)=3y+2\left(x^2-y^2\right).$$