Esame di Metodi Analitici per le EDP Terzo appello. Agosto 2023 Tema 1 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0 \text{ per } \rho \in (0,r)\,, \theta \in [0,2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) \ \text{ per } \theta \in [0,2\pi]\,. \end{cases}$$

La soluzione, determinata formalmente col metodo di separazione di variabili, è assegnata dalla formula:

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \text{ dove:}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \text{ per } n = 0,1,2,..$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta \text{ per } n = 1,2,3,..$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato al bordo f la u assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume il dato al bordo.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $\rho < r$, confrontandola con la regolarità del dato al bordo (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

2. (8 punti) Si consideri il problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \ \text{ per } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) = h(x) \ \text{ per } x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

a. Ricavare la formula (di Poisson) che assegna formalmente la soluzione di questo problema utilizzando il *metodo della discesa*, a partire dalla formula di Kirchhoff

$$u(\underline{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} g(\sigma)\, d\sigma\right] + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} h(\sigma)\, d\sigma$$

che assegna la soluzione dell'analogo problema in $\mathbb{R}^3$. [Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale].

b. Che confronto si può fare tra il dominio di dipendenza / influenza nel caso bi- e tri-dimensionale?

3. **(9 punti)** Dare la definizione di soluzione debole del *problema di Neumann* con dato al bordo g per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (\mathbf{A}(x)\nabla u(x)) + \underline{c}(x) \cdot \nabla u + d(x)\, u = f \text{ in } \Omega,$$

(con $\mathbf{A}(x)$ matrice simmetrica, $\underline{c}(x)$ vettore e $d(x)$ scalare, funzioni di x), ricavando la formulazione debole dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari. Quindi enunciare con precisione e dimostrare un teorema di buona posizione per questo problema (di Neumann) in forma debole.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0, 2\pi), t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x, 0) = \sin x, \end{cases}$$

riscrivendo la soluzione ottenuta nel modo più semplice possibile.

Prevedere in base alla teoria il valore della temperatura limite per tempi lunghi, prima di risolvere il problema.

Esame di Metodi Analitici per le EDP Terzo appello. Agosto 2023 Svolgimento Tema 1 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0 \text{ per } \rho \in (0,r)\,, \theta \in [0,2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) \text{ per } \theta \in [0,2\pi]\,. \end{cases}$$

La soluzione, determinata formalmente col metodo di separazione di variabili, è assegnata dalla formula:

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \text{ dove:}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \text{ per } n = 0,1,2,..$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta \text{ per } n = 1,2,3,..$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato al bordo f la u assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume il dato al bordo.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $\rho < r$, confrontandola con la regolarità del dato al bordo (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

2. (8 punti) Si consideri il problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

a. Ricavare la formula (di Poisson) che assegna formalmente la soluzione di questo problema utilizzando il *metodo della discesa*, a partire dalla formula di Kirchhoff

$$u(\underline{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} g(\sigma)\,d\sigma\right] + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} h(\sigma)\,d\sigma$$

che assegna la soluzione dell'analogo problema in $\mathbb{R}^3$. [Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale].

b. Che confronto si può fare tra il dominio di dipendenza / influenza nel caso bi- e tri-dimensionale?

3. **(9 punti)** Dare la definizione di soluzione debole del *problema di Neumann* con dato al bordo g per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (\mathbf{A}(x) \nabla u(x)) + \underline{c}(x) \cdot \nabla u + d(x) u = f \text{ in } \Omega,$$

(con $\mathbf{A}(x)$ matrice simmetrica, $\underline{c}(x)$ vettore e $d(x)$ scalare, funzioni di x), ricavando la formulazione debole dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari. Quindi enunciare con precisione e dimostrare un teorema di buona posizione per questo problema (di Neumann) in forma debole.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0, 2\pi), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, \end{cases}$$

riscrivendo la soluzione ottenuta nel modo più semplice possibile.

Prevedere in base alla teoria il valore della temperatura limite per tempi lunghi, prima di risolvere il problema.

La soluzione è data da:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$(D = 3, L = 2\pi)$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}n^2 t} a_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

con

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin x \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx$$

e per $t \to +\infty$,

$$u(t,x) \to \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0.$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin x \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\sin\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)x\right] - \sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)x\right]\right\} dx
\end{aligned}
$$

per $n \neq 2$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)x\right]}{\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)x\right]}{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-\cos(n\pi)}{\frac{n}{2}+1} + \frac{\cos(n\pi)-1}{\frac{n}{2}-1}\right) \\
&= \frac{1-\cos(n\pi)}{2\pi}\left(\frac{-2}{\frac{n^2}{4}-1}\right) = \frac{-1+\cos(n\pi)}{\pi}\left(\frac{4}{n^2-4}\right) \\
&= \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ pari} \\ -\frac{8}{\pi}\frac{1}{n^2-4} \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Per $n = 2$:

$$
a_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2x)\, dx = 0.
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2-4} e^{-\frac{3}{4}n^2 t} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \\
&= -\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2-4} e^{-\frac{3}{4}(2k+1)^2 t} \cos\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right).
\end{aligned}
$$