Esame di Metodi Analitici per le EDP
Quarto appello. Gennaio 2024
Tema 1
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Enunciare e dimostrare il principio di massimo per funzioni armoniche (o per funzioni che soddisfano un'ipotesi più debole). Enunciare quindi con precisione i risultati di unicità e di dipendenza continua della soluzione per il problema di Dirichlet su un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$. Confrontare le ipotesi sotto cui si è dimostrata l'unicità con questo procedimento con le ipotesi sotto cui la si può dimostrare usando le identità di Green.

2. (8 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

Suggerimento: è utile la formula per la trasformata di Fourier della Gaussiana n-dimensionale. Posto

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$$

si ha, per $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}.$$

3. (9 punti) Dare la definizione di derivata debole e di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$ e dimostrare che $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Enunciare poi il teorema di caratterizzazione dello spazio $H^1(a,b)$ (in una dimensione). Definire quindi gli spazi $H^m(\Omega)$ per $m = 2, 3, 4....$

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u\,(x,y) = 0 & \text{per } x^2 + y^2 < 1 \\ u\,(x,y) = x\,|y| & \text{per } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

riscrivendo la soluzione trovata nel modo il più possibile semplificato.

Esame di Metodi Analitici per le EDP Quarto appello. Gennaio 2024 Svolgimento Tema 1 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Enunciare e dimostrare il principio di massimo per funzioni armoniche (o per funzioni che soddisfano un'ipotesi più debole). Enunciare quindi con precisione i risultati di unicità e di dipendenza continua della soluzione per il problema di Dirichlet su un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$. Confrontare le ipotesi sotto cui si è dimostrata l'unicità con questo procedimento con le ipotesi sotto cui la si può dimostrare usando le identità di Green.

2. (8 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

Suggerimento: è utile la formula per la trasformata di Fourier della Gaussiana n-dimensionale. Posto

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$$

si ha, per $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}.$$

3. **(9 punti)** Dare la definizione di derivata debole e di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$ e dimostrare che $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Enunciare poi il teorema di caratterizzazione dello spazio $H^1(a,b)$ (in una dimensione). Definire quindi gli spazi $H^m(\Omega)$ per $m = 2, 3, 4....$

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{per } x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) = x|y| & \text{per } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

riscrivendo la soluzione trovata nel modo il più possibile semplificato.

$r = 1$; il dato al bordo è (ponendo $x = \cos\theta, y = \sin\theta$)

$$x\,|y| = \cos\theta\,|\sin\theta| \equiv f(\theta)\,.$$

La soluzione quindi è:

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right)$$

dove

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right)$$

è lo sviluppo di Fourier di $f(\theta) = \cos\theta\,|\sin\theta|$ in $[-\pi,\pi]$. Poiché f è pari, $b_n = 0$ e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta\sin\theta\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2\theta)\cos(n\theta)\,d\theta. \end{aligned}$$

Perciò per $n = 0$ si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2\theta)\,d\theta = 0$$

mentre per $n = 1, 2, 3, ...$ è:

$$\sin(2\theta)\cos(n\theta) = \frac{\sin((n+2)\theta) - \sin((n-2)\theta)}{2}$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin((n+2)\theta) - \sin((n-2)\theta)\right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n+2)\theta)}{n+2} + \frac{\cos((n-2)\theta)}{n-2}\right]_0^{\pi} \quad (\text{per } n \neq 2) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-\cos(n\pi)}{n+2} + \frac{\cos(n\pi)-1}{n-2}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)\left(\frac{-4}{n^2-4}\right) = \frac{2}{\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)\left(\frac{1}{4-n^2}\right) = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{4-n^2} \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Per $n = 2$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(4\theta)\,d\theta = 0.$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
u(\rho,\theta) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos(n\pi)\right)\left(\frac{1}{4-n^2}\right)\rho^n\cos(n\theta) \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4-(2k+1)^2}\rho^{2k+1}\cos\left((2k+1)\theta\right).
\end{aligned}
$$