Esame di Metodi Analitici per le EDP
Quinto appello. Febbraio 2024
Tema 1
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione $u(x,y)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. (9 punti) Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v costante reale, f e g assegnate. La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s)\, ds. \tag{1}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su f e g la u assegnata da (1) è una soluzione classica del problema.

b. Si definisca il concetto di *soluzione debole* dell'equazione e si dimostri sotto quali ipotesi la u assegnata dalla (1) è soluzione debole del problema. [E' sufficiente dimostrarlo nel caso $f = 0$].

3. **(9 punti)** Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per *problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert*. Quindi, nel caso particolare di una forma bilineare *simmetrica*, dimostrare, sotto ulteriori opportune ipotesi, il teorema di buona posizione del problema.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - 5u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,2)\,, t > 0 \\ u\,(0,t) = u\,(2,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u\,(x,0) = 0 \text{ per } x \in (0,2) \\ \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\pi x\right) \ \text{ per } x \in (0,2) \end{cases}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Quinto appello. Febbraio 2024 Svolgimento Tema 1 A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	8
Dom 2	9
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione $u(x,y)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. (9 punti) Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v costante reale, f e g assegnate. La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s)\, ds. \tag{2}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su f e g la u assegnata da (2) è una soluzione classica del problema.

b. Si definisca il concetto di *soluzione debole* dell'equazione e si dimostri sotto quali ipotesi la u assegnata dalla (2) è soluzione debole del problema. [E' sufficiente dimostrarlo nel caso $f = 0$].

3. (9 punti) Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per *problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert*. Quindi, nel caso particolare di una forma bilineare *simmetrica*, dimostrare, sotto ulteriori opportune ipotesi, il teorema di buona posizione del problema.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - 5u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,2)\,, t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = 0 \text{ per } x \in (0,2) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(\pi x) \ \text{ per } x \in (0,2) \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet in generale è data dalla formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left\{a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right\}$$

dove

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

e

$$b_n = \frac{\beta_n}{\frac{n\pi c}{L}}.$$

Nel nostro caso $L = 2, c = \sqrt{5}, u(x,0) = 0$ quindi $a_n = 0$. I coefficienti β_n vanno calcolati sviluppando in serie di soli seni la funzione $g(x) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(\pi x)$.

Poiché g è un polinomio trigonometrico che è anche funzione dispari, si può trasformare in sviluppo finito di soli seni mediante identità trigonometriche.

Si ha:

$$\begin{aligned} &\sin^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(\pi x) \\ &= \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(\pi x)}{2}\right)\cos(\pi x) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\cos(\pi x) - \cos^2(\pi x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\cos(\pi x) - \left(\frac{1+\cos(2\pi x)}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(\pi x) - \frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(2\pi x)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right] - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{8}\left[\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{3}{8}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - \frac{1}{8}\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Quindi la soluzione è:

$$
\begin{aligned}
u\left(x,t\right) &= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi\sqrt{5}t}{2}\right)}{\frac{\pi\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{8}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{3\pi\sqrt{5}t}{2}\right)}{\frac{3\pi\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{8}\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{5\pi\sqrt{5}t}{2}\right)}{\frac{5\pi\sqrt{5}}{2}} \\
&= -\frac{1}{\pi\sqrt{5}}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi\sqrt{5}t}{2}\right)+\frac{1}{4\pi\sqrt{5}}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi\sqrt{5}t}{2}\right)-\frac{1}{20\pi\sqrt{5}}\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{5\pi\sqrt{5}t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ed è infinitamente derivabile.