| Esame di Metodi Analitici per le EDP |
|---|
| Primo appello. Giugno 2024 |
| Svolgimento Tema 1 |
| A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti |

| | Punti |
|---|---|
| Dom 1 | 9 |
| Dom 2 | 8 |
| Dom 3 | 9 |
| Esercizio | 7 |
| Tot. | 33 |

**Rispondere alle seguenti domande:**

**1. (9 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

**2. (8 punti)** Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x, t) = \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy. \qquad (*)$$

*a.* Dimostrare sotto quali ipotesi su $g$ e $h$ la $u$ assegnata da (*) è una soluzione classica del problema.

*b.* Dimostrare una stima di stabilità per la soluzione del problema.

**3. (9 punti)** Dare la formulazione debole del problema di Neumann con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + d(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega,$$

(con $a(x)$ scalare) ricavandola dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari. Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert.

**Svolgere il seguente esercizio:**
**4. (7 punti)** Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u\,(x,y) = 0 \text{ per } x^2+y^2<3 \\ u = x^2-2y^2+3x^2y^2 \text{ per } x^2+y^2=3 \end{cases}$$

determinando la soluzione prima in funzione di $(\rho,\theta)$ e poi di $(x,y)$.

Anzitutto esprimiamo il dato al bordo in funzione di $\theta$, cioè in coordinate polari per $\rho=\sqrt{3}$:

$$x^2-2y^2+3x^2y^2 = 3\cos^2\theta - 6\sin^2\theta + 27\cos^2\theta\sin^2\theta \equiv f\,(\theta)\,.$$

Ora osserviamo che il dato al bordo è un polinomio trigonometrico, cioè può essere riscritto come somma di una serie di Fourier finita, usando le identità trigonometriche:

$$\begin{aligned} f\,(\theta) &= 3\left\{\frac{\cos 2\theta+1}{2} - (1-\cos 2\theta) + \frac{9}{4}\left(1-\cos^2 2\theta\right)\right\} \\ &= 3\left\{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2\theta + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\frac{\cos 4\theta+1}{2}\right\} \\ &= 3\left\{\frac{5}{8}+\frac{3}{2}\cos 2\theta - \frac{9}{8}\cos 4\theta\right\}. \end{aligned}$$

Quindi la soluzione è:

$$\begin{aligned} u\,(\rho,\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\sqrt{3}}\right)^n (a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ &= 3\left\{\frac{5}{8}+\frac{3}{2}\left(\frac{\rho}{\sqrt{3}}\right)^2\cos 2\theta - \frac{9}{8}\left(\frac{\rho}{\sqrt{3}}\right)^4\cos 4\theta\right\} \\ &= \frac{15}{8}+\frac{3}{2}\rho^2\cos 2\theta - \frac{3}{8}\rho^4\cos 4\theta \end{aligned}$$

Riscriviamola in coordinate cartesiane

$$\begin{aligned} u\,(x,y) &= \frac{15}{8}+\frac{3}{2}\operatorname{Re}(x+iy)^2 - \frac{3}{8}\operatorname{Re}(x+iy)^4 \\ & \frac{15}{8}+\frac{3}{2}\left(x^2-y^2\right) - \frac{3}{8}\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right). \end{aligned}$$

| Esame di Metodi Analitici per le EDP<br>Primo appello. Giugno 2024<br>Svolgimento Tema 2<br>A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti |
|---|

| | Punti |
|---|---|
| Dom 1 | 9 |
| Dom 2 | 8 |
| Dom 3 | 9 |
| Esercizio | 7 |
| Tot. | 33 |

**Rispondere alle seguenti domande:**

**1. (9 punti)** Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Utilizzando i metodi studiati nel corso, determinare (presentando in dettaglio il procedimento risolutivo):

*a.* una formula di rappresentazione esplicita per l'integrale generale dell'equazione;

*b.* una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione del problema di Cauchy, precisando le ipotesi su $f, g$ sotto le quali $u$ è soluzione classica del problema (senza dimostrare quest'ultima affermazione).

**2. (8 punti)** Enunciare e dimostrare il teorema della media per funzioni armoniche in $n$ variabili.

**3. (9 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0,L] \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0,L]. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo di separazione delle variabili è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ con}$$
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Si chiede di:

*a.* Dimostrare sotto quali ipotesi sulla condizione iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e discutere la regolarità della soluzione per $t > 0$.

*b.* Discutere sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale, dimostrando le affermazioni fatte.

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

**Svolgere il seguente esercizio:**

**4. (7 punti)** Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto con termine di sorgente:

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = xe^{-2t} \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+|x|} \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Studiare poi il comportamento della soluzione per tempi lunghi: la soluzione si stabilizza su una funzione indipendente dal tempo, e se sì quale?

La soluzione è assegnata da:

$$u(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s)\, ds$$

$$\text{con } g(x) = \frac{1}{1+|x|}, f(x,t) = xe^{-2t}, v = 3$$

$$u(x,t) = \frac{1}{1+|x-3t|} + \int_0^t (x - 3(t-s))\, e^{-2s} ds$$

$$g(x - vt) = \frac{1}{1+|x-3t|}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (x - 3(t-s))\, e^{-2s} ds \\
&= (x-3t) \int_0^t e^{-2s} ds + 3 \int_0^t s e^{-2s} ds \\
&= (x-3t) \left[ -\frac{1}{2} e^{-2s} \right]_0^t + 3 \left\{ \left[ -\frac{1}{2} s e^{-2s} \right]_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2s} ds \right\} \\
&= (x-3t) \left( \frac{1-e^{-2t}}{2} \right) + 3 \left\{ -\frac{1}{2} t e^{-2t} + \left( \frac{1-e^{-2t}}{4} \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2t} \left( x - 3t + 3t + \frac{3}{2} \right) + \left( \frac{x-3t}{2} + \frac{3}{4} \right) \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2t} \left( x + \frac{3}{2} \right) + \left( \frac{2x-6t+3}{4} \right).
\end{aligned}$$

Quindi

$$u(x,t) = \frac{1}{1+|x-3t|} - \frac{1}{2} e^{-2t} \left( x + \frac{3}{2} \right) + \left( \frac{2x-6t+3}{4} \right).$$

Per $t \to \infty$, $u(x,t) \sim \frac{2x-6t+1}{4} \sim \frac{-3}{2} t$ che *non* è una funzione indipendente dal tempo. Per ogni $x$ fissato si ha $u(x,t) \to -\infty$ per $t \to +\infty$.

| Esame di Metodi Analitici per le EDP<br>Primo appello. Giugno 2024<br>Svolgimento Tema 3<br>A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti |
| --- |

| | Punti |
| --- | --- |
| Dom 1 | 9 |
| Dom 2 | 9 |
| Dom 3 | 8 |
| Esercizio | 7 |
| Tot. | 33 |

**Rispondere alle seguenti domande:**

**1. (9 punti)** Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $r$ che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 \text{ per } \rho \in (0,r), \theta \in [0, 2\pi] \\ u(r, \theta) = f(\theta) \text{ per } \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

La soluzione, determinata formalmente col metodo di separazione di variabili, è assegnata dalla formula:

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \text{ dove:}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) \, d\theta \text{ per } n = 0, 1, 2, ..$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) \, d\theta \text{ per } n = 1, 2, 3, ..$$

Si chiede di:

*a.* Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato al bordo $f$ la $u$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume il dato al bordo.

*b.* Discutere la regolarità della soluzione per $\rho < r$, confrontandola con la regolarità del dato al bordo (precisando le ipotesi su $f$ sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

**2. (9 punti)** Enunciare (senza dimostrazione) il principio di massimo debole per l'equazione del calore. Quindi enunciare e dimostrare come conseguenze di questo teorema i risultuati di *unicità*, *confronto* e *stabilità* per il problema di Cauchy-Dirichlet su un dominio opportuno.

**3**. **(8 punti)** Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$ e dello spazio $H_0^1(\Omega)$, discutere il concetto di *traccia* di una funzione $H^1(\Omega)$ e enunciare con precisione i risultati visti nel corso a questo riguardo. Quindi, enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti per due funzioni $H^1(\Omega)$.

**Svolgere il seguente esercizio:**

**4. (7 punti)** Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,1)\,, t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = x^2 \text{ per } x \in (0,1)\,. \end{cases}$$

In quale senso è assunta la condizione iniziale? Calcolare il valore della temperatura limite per tempi lunghi.

La soluzione è data da:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$(D = 2, L = 1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\pi^2 t} a_n \cos(n\pi x)$$

con

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x^2 \cos(n\pi x)\,dx.$$

e per $t \to +\infty$,

$$u(t,x) \to \frac{a_0}{2} = \frac{2}{2}\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Calcoliamo per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 x^2 \cos(n\pi x)\,dx = 2\left\{\left[\frac{x^2 \sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}dx\right\} \\ &= -\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx = -\frac{4}{n\pi}\left\{\left[\frac{-x\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx\right\} \\ &= -\frac{4}{n\pi}\left\{\frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} + 0\right\} = \frac{4\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2}. \end{aligned}$$

quindi

$$u(x,t) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\pi^2 t}\frac{\cos(n\pi)}{n^2}\cos(n\pi x)\,.$$

Poiché il dato $f(x) = x^2$ del problema di Cauchy-Neumann è continuo e regolare a tratti in $[0,1]$, la condizione iniziale è assunta in senso classico (oltre che $L^2$).

(D'altro canto, si osserva che la serie che definisce la soluzione converge totalmente per $t \geq 0$

$$\left| e^{-2n^2\pi^2 t} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} \cos(n\pi x) \right| \leq \frac{1}{n^2}, \text{ con } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

quindi la $u$ è continua per $t \geq 0$ e la condizione iniziale è assunta con continuità come limite uniforme).

| Esame di Metodi Analitici per le EDP<br>Primo appello. Giugno 2024<br>Svolgimento Tema 4<br>A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti |
|---|

| | Punti |
|---|---|
| Dom 1 | 9 |
| Dom 2 | 9 |
| Dom 3 | 8 |
| Esercizio | 7 |
| Tot. | 33 |

| | |
|---|---|
| **Cognome:** | |
| **Nome:** | |
| **Codice persona:** | |
| **N° d'ordine in elenco:** | |

**Rispondere alle seguenti domande:**

**1. (9 punti)** Si consideri il problema di Neumann per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $r$ che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 \text{ per } \rho \in (0,r), \theta \in [0,2\pi] \\ u_\rho(r,\theta) = f(\theta) \text{ per } \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione $u(\rho,\theta)$, utilizzando il metodo studiato nel corso, e ricavando in particolare la *condizione di compatibilità* che dev'essere soddisfatta da $f$. La soluzione trovata con questo metodo è unica?

Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale -a parte la condizione di compatiblità-.

**2. (9 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo della trasformata di Fourier è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} f(y)\, dy.$$

Si chiede di:

*a.* Dimostrare sotto quali ipotesi sulla condizione iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale.

*b.* Discutere la regolarità della soluzione per $t > 0$, confrontandola con la regolarità della condizione iniziale (precisando le ipotesi su $f$ sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

**3**. **(8 punti)** Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare e dimostrare il teorema che mette in relazione la soluzione di un problema variazionale astratto con un problema di minimizzazione di un opportuno funzionale.

**Svolgere il seguente esercizio:**

**4. (7 punti)** Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione (non omogenea) della corda vibrante illimitata, riscrivendo la soluzione nella forma il più possibile semplificata:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \frac{1}{1+t^2} \text{ per } x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u\,(x,0) = \sin x \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t\,(x,0) = \frac{x}{1+x^2} \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Precisare quindi che regolarità ha la soluzione.

Applicando la formula di D'Alembert e la formula per l'equazione non omogenea

$$u\,(x,t) = \frac{g\,(x+ct) + g\,(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h\,(y)\,dy + \int_0^t \left(\frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f\,(y,s)\,dy\right) ds$$

con $c = 2, g\,(x) = \sin$, $f\,(x,t) = \frac{1}{1+t^2}\cos x$ e $h\,(x) = \frac{x}{1+x^2}$ si ha:

$$\begin{aligned} u\,(x,t) &= \frac{\sin\,(x+2t) + \sin\,(x-2t)}{2} + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \frac{y}{1+y^2}dy + \int_0^t \left(\frac{1}{4}\int_{x-2(t-s)}^{x+2(t-s)} dy\right)\frac{ds}{1+s^2} \\ &= \sin x \cos 2t + \frac{1}{8}\left[\log\left(1+y^2\right)\right]_{x-2t}^{x+2t} + \int_0^t \frac{(t-s)}{1+s^2}ds \\ &= \sin x \cos 2t + \frac{1}{8}\log\left(\frac{1+(x+2t)^2}{1+(x-2t)^2}\right) + \left[t \arctan s - \frac{1}{2}\log\left(1+s^2\right)\right]_0^t \\ &= \sin x \cos 2t + \frac{1}{8}\log\left(\frac{1+(x+2t)^2}{1+(x-2t)^2}\right) + t\arctan t - \frac{1}{2}\log\left(1+t^2\right). \end{aligned}$$

La soluzione è infinitamente derivabile, come lo sono termine noto e condizioni iniziali.