Esame di Metodi Analitici per le EDP Secondo appello. Luglio 2024 Svolgimento Tema 1 A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	8
Dom 2	9
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione *non omogenea* del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = F(x,t) \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{*}$$

Ricordando che la soluzione del problema analogo per l'equazione *omogenea* (cioè con $F \equiv 0$), ottenuta col metodo della trasformata di Fourier, è assegnata (sotto opportune ipotesi) dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y)\, dy$$

determinare una formula risolutiva per il problema (*) col *metodo di Duhamel.* Si chiede di presentare in dettaglio il metodo di Duhamel e il modo in cui si arriva a una formula risolutiva esplicita per la soluzione u. (Non si chiede di dimostrare che sotto opportune ipotesi su f la u trovata è soluzione).

2. (9 punti) Scrivere il generico problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde su un cilindro $\Omega \times (0,T)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domino limitato. Che significato fisico può avere per $n = 2$? Enunciare e dimostrare un *teorema di unicità* per questo problema sotto opportune ipotesi su Ω e in un'opportuna classe di funzioni.

3. (9 punti) Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v costante reale, f e g assegnate.

a. Si definisca il concetto di *soluzione classica* e *soluzione debole* dell'equazione e si dimostri che una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

b. Si dimostri che una soluzione debole del problema, sotto opportune ipotesi di regolarità su u, f, g (precisare quali) è anche soluzione classica.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Determinare tutte le soluzioni del problema di Neumann per il laplaciano sul cerchio, dopo aver verificato che la condizione di compatibilità del dato al bordo è soddisfatta:

$$\begin{cases} \Delta u(\rho,\theta) = 0 & \text{per } \rho < 3, \theta \in [-\pi,\pi] \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(3,\theta) = \theta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \text{per } \theta \in [-\pi,\pi] \end{cases}$$

Sia

$$f(\theta) = \theta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ in } [-\pi,\pi].$$

Poiché f è dispari,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = 0.$$

La condizione di compatibilità è soddisfatta, la soluzione esiste ed è unica a meno di costante additiva.

Calcoliamo i coefficienti di Fourier di f. Poiché f è dispari su $[-\pi,\pi]$ si ha:

$$\begin{aligned}
a_n &= 0; \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \theta\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\theta\left[\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)+\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right]d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\theta\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)+\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right)\right]_0^{\pi}\right. \\
&\left. + \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)+\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right)d\theta\right\} \\
&= 0 + \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)+\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}(-1)^n+\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}(-1)^{n+1}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(n^2-\frac{1}{4}\right)^2}\right) = \frac{32}{\pi}\frac{n(-1)^{n+1}}{\left(4n^2-1\right)^2}.
\end{aligned}$$

La formula che assegna la soluzione del problema di Neumann è

$$u(\rho,\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n \sin n\theta\right)$$

dove i coefficienti α_n, β_n vanno scelti in modo che la derivata rispetto a ρ sul bordo (per $\rho = r = 3$) coincida col dato, quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\rho}u(\rho,\theta)_{/\rho=3} &= \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta)_{/\rho=3} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta) = f(\theta),\end{aligned}$$

perciò la relazione tra α_n, β_n e i coefficienti di Fourier a_n, b_n di f è:

$$\begin{aligned} n3^{n-1}\alpha_n &= a_n \\ n3^{n-1}\beta_n &= b_n \end{aligned}$$

con la condizione necessaria $a_0 = 0$ (condizione di compatibilità), e u determinata a meno della costante additiva α_0. Quindi

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 0 \\ \beta_n &= \frac{1}{n3^{n-1}}\frac{32}{\pi}\frac{n(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)^2} = \frac{32}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}(4n^2-1)^2} \end{aligned}$$

$$u(\rho,\theta) = \alpha_0 + \frac{32}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\rho^n\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}(4n^2-1)^2}\right\}\sin n\theta.$$

con α_0 indeterminata.

Esame di Metodi Analitici per le EDP Secondo appello. Luglio 2024 Svolgimento Tema 2 A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione $u(x,y)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. (8 punti) Dedurre l'equazione di diffusione del calore in un mezzo continuo, non necessariamente omogeneo, in presenza di termini di sorgente, spiegando i passaggi della deduzione e il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta. (La funzione u incognita rappresenta la temperatura).

Quindi presentare (senza farne la deduzione) l'equazione di diffusione di una sostanza in un mezzo continuo (la funzione u incognita rappresenta la concentrazione), in presenza di termini di sorgente, termini di trasporto e reazione, spiegando il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta.

3. **(9 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0,L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0,L] \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in [0,L] \end{cases}$$

La soluzione del problema, ottenuta col metodo di separazione delle variabili, è assegnata formalmente dalla seguente formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left\{a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right\}, \text{ con:}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulle condizioni iniziali $f(x), g(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve il problema di Cauchy-Dirichlet precedente.

b. Discutere in dettaglio le proprietà delle singole funzioni $u_n(x,t)$, in relazione al significato fisico del fenomeno: che tipo di vibrazione rappresenta u_n e che significato hanno i vari parametri [parole chiave da toccare nella risposta: periodo, frequenza, ampiezza, pulsazione, stazionarietà, punti nodali].

c. Discutere che significato fisico ha il fatto che la soluzione u sia somma degli infiniti termini u_n [qualche parola chiave da toccare nella risposta: periodicità, frequenza fondamentale, armoniche].

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sulla sbarra finita, dopo aver previsto in base alla teoria in che senso sarà assunto il dato iniziale:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,2), t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = x \sin(\pi x) \end{cases}$$

Poiché il dato iniziale $f(x) = x\sin(\pi x)$ è continuo, regolare e rispetta la condizione di raccordo $f(0) = f(2) = 0$, il dato iniziale sarà assunto come limite uniforme, oltre che L^2.

La soluzione è data da:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$(L = 2, D = 3)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}\pi^2 n^2 t} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

con

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x\sin(\pi x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^2 x\sin(\pi x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

per $n \neq 2$

$$= \int_0^2 x\frac{1}{2}\left\{-\cos\left[\left(1+\frac{n}{2}\right)\pi x\right] + \cos\left[\left(1-\frac{n}{2}\right)\pi x\right]\right\}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left\{\left[x\left\{-\frac{\sin\left[\left(1+\frac{n}{2}\right)\pi x\right]}{\left(1+\frac{n}{2}\right)\pi}+\frac{\sin\left[\left(1-\frac{n}{2}\right)\pi x\right]}{\left(1-\frac{n}{2}\right)\pi}\right\}\right]_0^2\right.\\
&\left.-\int_0^2\left\{-\frac{\sin\left[\left(1+\frac{n}{2}\right)\pi x\right]}{\left(1+\frac{n}{2}\right)\pi}+\frac{\sin\left[\left(1-\frac{n}{2}\right)\pi x\right]}{\left(1-\frac{n}{2}\right)\pi}\right\}dx\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{0+\left[-\frac{\cos\left[\left(1+\frac{n}{2}\right)\pi x\right]}{\left(1+\frac{n}{2}\right)^2\pi^2}+\frac{\cos\left[\left(1-\frac{n}{2}\right)\pi x\right]}{\left(1-\frac{n}{2}\right)^2\pi^2}\right]_0^2\right\}\\
&= \frac{1}{2\pi^2}\left(-\frac{\cos n\pi-1}{\left(1+\frac{n}{2}\right)^2}+\frac{\cos n\pi-1}{\left(1-\frac{n}{2}\right)^2}\right)\\
&= \frac{1-\cos n\pi}{2\pi^2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{n}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(1-\frac{n}{2}\right)^2}\right)=\frac{1-\cos n\pi}{2\pi^2}\left(\frac{-2n}{\left(1-\frac{n^2}{4}\right)^2}\right)\\
&= \frac{\cos n\pi-1}{\pi^2}\frac{16n}{\left(4-n^2\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Per $n=2$,

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \int_0^2 x\sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x\left[1-\cos(2\pi x)\right]dx\\
&= \frac{1}{2}\left\{2-\int_0^2 x\cos(2\pi x)\,dx\right\}=1-\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x\sin(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^2-\int_0^2\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}dx\right\}\\
&= 1-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2\pi x)}{(2\pi)^2}\right]_0^2=1.
\end{aligned}
$$

$$
u(x,t)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1\\(n\neq 2)}}^{\infty}e^{-\frac{3}{4}\pi^2n^2t}\frac{16n\left(\cos n\pi-1\right)}{\left(4-n^2\right)^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+e^{-3\pi^2t}\sin(\pi x)
$$