Esame di Metodi Analitici per le EDP Terzo appello. Agosto 2024 Svolgimento Tema 1 A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ per } \underline{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = 0 \text{ per } \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = h(x) \ \text{ per } \underline{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Impostare la soluzione di questo problema col *metodo delle medie sferiche*, dimostrando come si ottiene, nel caso $n = 3$, la formula di Kirchhoff. [Non è richiesta la dimostrazione dell'equazione di Darboux].

2. (8 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) = f(x) \ \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione, determinata formalmente col metodo della trasformata di Fourier, è assegnata dalla formula:

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato al bordo f la u assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume il dato al bordo.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $y > 0$, confrontandola con la regolarità del dato al bordo (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

3. (9 punti) Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti tra una funzione $H^1(\Omega)$ e una $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré e la sua conseguenza riguardo alla norma nello spazio $H_0^1(\Omega)$.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto e reazione con termine di sorgente:

$$\begin{cases} u_t + 4u_x + 2u = \sin x \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \cos x \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Studiare quindi il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè $t \to \infty$).

La soluzione è assegnata da:

$$u(x,t) = g(x - vt)\, e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} f(x - v(t-s), s)\, ds$$

con $g(x) = \cos x, f(x,t) = \sin x, v = 4, \gamma = 2$

$$u(x,t) = e^{-2t} \cos(x - 4t) + \int_0^t e^{-2(t-s)} \sin(x - 4(t-s))\, ds.$$

$$\begin{aligned} &\int_0^t e^{-2(t-s)} \sin(x - 4(t-s))\, ds = \int_0^t e^{-2s} \sin(x - 4s)\, ds \\ &= (...) = \left[\frac{1}{10} e^{-2s} (2\cos(x - 4s) - \sin(x - 4s))\right]_0^t \\ &= \frac{1}{10} \left\{ e^{-2t} (2\cos(x - 4t) - \sin(x - 4t)) - (2\cos x - \sin x) \right\}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-2t} \cos(x - 4t) \\ &\quad + \frac{1}{10} \left\{ e^{-2t} (2\cos(x - 4t) - \sin(x - 4t)) - (2\cos x - \sin x) \right\} \\ &= e^{-2t} \left\{ \frac{6}{5} \cos(x - 4t) - \frac{1}{10} \sin(x - 4t) \right\} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x. \end{aligned}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, per $t \to +\infty$,

$$u(x,t) \to \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x.$$

La soluzione quindi si stabilizza su una funzione indipendente dal tempo).