Esame di Metodi Analitici per le EDP
Quarto appello. Gennaio 2025
Tema 1
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L] \\ u_t(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in [0, L] \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. (8 punti) Dimostrare che, per ogni $n \geq 3$,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n (n-2) |x|^{n-2}}$$

è una soluzione di $\Delta\Gamma = -\delta_0$ in $\mathbb{R}^n$, nel senso delle distribuzioni. (Se preferite, fatelo solo per $n = 3$, con $\omega_3 = 4\pi$).

3. (9 punti) Dare la formulazione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + d(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega,$$

(con $a(x), d(x)$ funzioni scalari di x) ricavandola dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari. Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert. La soluzione del problema risolve anche un problema di minimo di funzionale? Spiegare.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,3)\,, t > 0 \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = e^x \text{ per } x \in (0,3)\,. \end{cases}$$

In base alla teoria, in questo caso, in quale senso si può prevedere che sarà assunta la condizione iniziale?

Esame di Metodi Analitici per le EDP Quarto appello. Gennaio 2025 Svolgimento Tema 1 A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	9
Dom 2	8
Dom 3	9
Esercizio	7
Tot.	33

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \;\text{ per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) \;\text{ per } x \in [0, L] \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. (8 punti) Dimostrare che, per ogni $n \geq 3$,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n (n-2) |x|^{n-2}}$$

è una soluzione di $\Delta\Gamma = -\delta_0$ in $\mathbb{R}^n$, nel senso delle distribuzioni. (Se preferite, fatelo solo per $n = 3$, con $\omega_3 = 4\pi$).

3. (9 punti) Dare la formulazione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + d(x) u(x) = f(x) \;\text{ in } \Omega,$$

(con $a(x), d(x)$ funzioni scalari di x) ricavandola dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari. Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert. La soluzione del problema risolve anche un problema di minimo di funzionale? Spiegare.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,3)\,, t > 0 \\ u\,(0,t) = u\,(3,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u\,(x,0) = e^x \text{ per } x \in (0,3)\,. \end{cases}$$

In base alla teoria, in questo caso, in quale senso si può prevedere che sarà assunta la condizione iniziale?

Poiché il dato iniziale $f\,(x) = e^x$ non rispetta la condizione di raccordo $f\,(0) = f\,(3) = 0$, il limite non sarà uniforme. La condizione iniziale sarà assunta in senso $L^2\,(0,3)$.

$$\begin{aligned} u\,(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &(L = 3, D = 4) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 4t}{9}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \\ &\text{con} \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f\,(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{3}\int_0^3 e^x \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 e^x \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \left[e^x \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_0^3 - \frac{n\pi}{3}\int_0^3 e^x \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx \\ &= -\frac{n\pi}{3}\left\{\left[e^x \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_0^3 + \frac{n\pi}{3}\int_0^3 e^x \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right\} \\ &= -\frac{n\pi}{3}\left\{e^3\cos\left(n\pi\right) - 1 + \frac{n\pi}{3}I\right\} \\ I &= -\frac{n\pi}{3}\left(e^3\cos\left(n\pi\right) - 1\right) - \left(\frac{n\pi}{3}\right)^2 I \\ I &= \frac{-\frac{n\pi}{3}}{1+\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}\left(e^3\cos\left(n\pi\right) - 1\right) \\ b_n &= \frac{2}{3}I = \frac{-\frac{2}{9}n\pi}{1+\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}\left(e^3\cos\left(n\pi\right) - 1\right) = \frac{2\pi n}{9+\pi^2 n^2}\left(1 - e^3\cos\left(n\pi\right)\right) \end{aligned}$$

Quindi

$$u\,(x,t) = 2\pi\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 4t}{9}} \frac{n}{9+\pi^2 n^2}\left(1 - e^3\cos\left(n\pi\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right).$$