Esame di Metodi Analitici per le EDP Quinto appello. Febbraio 2025 Tema 1 A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Cognome:	
Nome:	
Codice persona:	
N° d'ordine in elenco:	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Si consideri il problema di Cauchy per l'*equazione lineare del trasporto*, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f(t,x) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

con v costante reale, f, g funzioni assegnate, $u(x,t)$ funzione incognita. Determinare la soluzione del problema, utilizzando i metodi visti nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione e quindi dimostrare che, sotto opportune ipotesi su f e g, è effettivamente soluzione.

[Suggerimento: procedere per passi successivi, a cominciare dal caso $f = 0$].

2. (9 punti) Enunciare e dimostrare il principio di massimo debole per l'equazione del calore e mostrare come da questo si deduce un risultato di unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet su un dominio opportuno.

3. (9 punti) Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per *problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert*. Quindi, nel caso particolare di una forma bilineare *simmetrica*, dimostrare, sotto ulteriori opportune ipotesi, il teorema di buona posizione del problema.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,1), t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = x^2 - x \text{ per } x \in (0,1) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin^3(\pi x) \text{ per } x \in (0,1) \end{cases}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP Quinto appello. Febbraio 2025 Svolgimento Tema 1 A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Si consideri il problema di Cauchy per l'*equazione lineare del trasporto*, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(t,x) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

con v costante reale, f, g funzioni assegnate, $u(x,t)$ funzione incognita. Determinare la soluzione del problema, utilizzando i metodi visti nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione e quindi dimostrare che, sotto opportune ipotesi su f e g, è effettivamente soluzione.

[Suggerimento: procedere per passi successivi, a cominciare dal caso $f = 0$].

2. (9 punti) Enunciare e dimostrare il principio di massimo debole per l'equazione del calore e mostrare come da questo si deduce un risultato di unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet su un dominio opportuno.

3. **(9 punti)** Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per *problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert*. Quindi, nel caso particolare di una forma bilineare *simmetrica*, dimostrare, sotto ulteriori opportune ipotesi, il teorema di buona posizione del problema.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0,1), t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = x^2 - x \text{ per } x \in (0,1) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin^3(\pi x) \text{ per } x \in (0,1) \end{cases}$$

La soluzione è assegnata da:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\}.$$

Qui $L=1, c=3$ perciò

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x)\left\{a_n\cos(3n\pi t)+b_n\sin(3n\pi t)\right\},$$

con

$$\begin{aligned}x^2-x&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(n\pi x)\\ \sin^3(\pi x)&=\sum_{n=1}^{\infty}3n\pi b_n\sin(n\pi x).\end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{L}\int_0^L\left(x^2-x\right)\sin(n\pi x)\,dx=2\int_0^1\left(x^2-x\right)\sin(n\pi x)\,dx\\
&=2\left\{\left[\frac{-\left(x^2-x\right)\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1+\int_0^1\frac{(2x-1)\cos(n\pi x)}{n\pi}dx\right\}\\
&=\frac{2}{n\pi}\int_0^1(2x-1)\cos(n\pi x)\,dx=\frac{2}{n\pi}\left\{\left[\frac{(2x-1)\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1-\int_0^1 2\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}dx\right\}\\
&=-\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1=\frac{4}{n^3\pi^3}\left(\cos(n\pi)-1\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3(\pi x)&=\sin(\pi x)\cdot\sin^2(\pi x)=\sin(\pi x)\left(\frac{1-\cos(2\pi x)}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin(\pi x)-\frac{1}{2}\sin(\pi x)\cos(2\pi x)\\
&=\frac{1}{2}\sin(\pi x)-\frac{1}{4}\left(\sin(3\pi x)-\sin(\pi x)\right)=\frac{3}{4}\sin(\pi x)-\frac{1}{4}\sin(3\pi x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}&=3\pi b_1,\text{ quindi } b_1=\frac{1}{4\pi}\\ -\frac{1}{4}&=9\pi b_3,\text{ quindi } b_3=-\frac{1}{36\pi}\end{aligned}$$

In definitiva si ha:

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x)\left\{a_n\cos(3n\pi t)+b_n\sin(3n\pi t)\right\}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3\pi^3}\left(\cos(n\pi)-1\right)\sin(n\pi x)\cos(3n\pi t)\\
&+\frac{1}{4\pi}\sin(\pi x)\sin(3\pi t)-\frac{1}{36\pi}\sin(3\pi x)\sin(9\pi t).\end{aligned}$$