

Esame di Metodi Analitici per le EDP
 Primo appello. Giugno 2026
 Svolgimento Tema 1
 A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0 & \text{per } \rho \in (0, r), \theta \in [0, 2\pi] \\ u(r, \theta) = f(\theta) & \text{per } \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione $u(\rho, \theta)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

2. (8 punti) Enunciare e dimostrare il *principio di massimo debole per l'equazione del calore* (richiamando la definizione di *frontiera parabolica*) e mostrare come da questo si deduce un risultato di unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet su un dominio opportuno.

3. (9 punti) Dare la definizione di derivata debole (anche di ordine successivo al primo) e definire gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e $H^k(\Omega)$ per Ω aperto di \mathbb{R}^n , con la loro struttura di spazi di Banach e di Hilbert, rispettivamente. Quindi, dimostrare che $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il seguente problema di Cauchy per l'equazione non omogenea della corda vibrante illimitata, riscrivendo la soluzione nella forma il più possibile semplificata:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = e^{-2t} & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(3|x|) & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = xe^{-x^2} & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Precisare quindi che regolarità ha la soluzione.

Applicando la formula di D'Alembert e la formula per l'equazione non omogenea si ha:

$$u(x, t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy + \int_0^t \left(\frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy \right) ds$$

con $c = 3$, $g(x) = \sin(3|x|)$, $h(x) = xe^{-x^2}$, $f(x, t) = e^{-2t}$, si ha:

$$u(x, t) = \frac{\sin(3|x+3t|) + \sin(3|x-3t|)}{2} + \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} ye^{-y^2} dy + \int_0^t \left(\frac{1}{6} \int_{x-3(t-s)}^{x+3(t-s)} e^{-2s} dy \right) ds.$$

Calcoliamo a parte i due integrali:

$$\frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} ye^{-y^2} dy = \frac{1}{6} \left[\frac{e^{-y^2}}{-2} \right]_{x-3t}^{x+3t} = \frac{1}{12} \left\{ e^{-(x-3t)^2} - e^{-(x+3t)^2} \right\};$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{1}{6} \int_{x-3(t-s)}^{x+3(t-s)} e^{-2s} dy \right) ds &= \int_0^t e^{-2s} \left(\frac{1}{6} 6(t-s) \right) ds = \int_0^t e^{-2s} (t-s) ds \\ &= \left[\frac{e^{-2s}}{-2} (t-s) \right]_0^t + \int_0^t \frac{e^{-2s}}{-2} ds \\ &= \frac{t}{2} + \left[\frac{e^{-2s}}{4} \right]_0^t = \frac{2t + e^{-2t} - 1}{4}. \end{aligned}$$

In definitiva,

$$u(x, t) = \frac{\sin(3|x+3t|) + \sin(3|x-3t|)}{2} + \frac{1}{12} \left\{ e^{-(x-3t)^2} - e^{-(x+3t)^2} \right\} + \frac{2t + e^{-2t} - 1}{4}.$$

Il secondo addendo e il terzo addendo sono infinitamente derivabili, mentre il primo è solo continuo, così come la funzione $g(x) = \sin(3|x|)$. Pertanto la soluzione è $C^0(\mathbb{R}^2)$ ma non $C^2(\mathbb{R}^2)$ (né $C^1(\mathbb{R}^2)$). Andrà perciò interpretata come soluzione in senso debole.

Esame di Metodi Analitici per le EDP
 Primo appello. Giugno 2026
 Svolgimento Tema 2
 A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Enunciare e dimostrare il *principio di massimo* per l'equazione di Poisson. Dedurre da questo un *teorema di unicit * per il problema di Dirichlet. Confrontare le ipotesi sotto cui si   dimostrata l'unicit  con questo procedimento con le ipotesi sotto cui la si pu  dimostrare usando le identit  di Green.

2. (9 punti) Si consideri il problema di Cauchy per l'*equazione lineare del trasporto*, non omogenea, con termine di reazione:

$$\begin{cases} u_t + vu_x + \gamma u = f(x, t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v, γ costanti reali, $\gamma > 0$, f, g funzioni assegnate, $u(x, t)$ funzione incognita. Dopo aver spiegato il significato fisico dell'equazione e dei vari termini in essa presenti, determinare la soluzione del problema, utilizzando i metodi visti nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione. (Non si chiede di dimostrare che, sotto opportune ipotesi, la funzione determinata   effettivamente soluzione).

[Suggerimento: procedere per passi successivi, a cominciare dal caso $f = 0, \gamma = 0$].

3. (9 punti) Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{per } x \in (0, L). \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo di separazione delle variabili   assegnata dalla formula:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ con}$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato iniziale $f(x)$ la $u(x, t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione, e qual è la regolarità della soluzione per $t > 0$.

b. Discutere sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale, dimostrando le affermazioni fatte.

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - 8u_{xx} = 0 & \text{per } x \in (0, 2), t > 0 \\ u(0, t) = u(2, t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(3\pi x) & \text{per } x \in (0, 2) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x \sin(\pi x) & \text{per } x \in (0, 2) \end{cases}$$

Si raccomanda di curare l'impostazione dell'esercizio e riscrivere la soluzione ottenuta nella forma il più possibile esplicita e semplificata.

La soluzione è assegnata da:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\} \\ &\quad (L = 2, c = 2\sqrt{2}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \left\{ a_n \cos(n\pi\sqrt{2}t) + b_n \sin(n\pi\sqrt{2}t) \right\} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \sin(3\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\ x \sin(\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\sqrt{2}b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \sin(3\pi x) &= \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \text{ per } n = 6, \text{ quindi} \\ a_6 &= 1, a_n = 0 \text{ per } n \neq 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n\pi\sqrt{2}b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x \sin(\pi x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^2 x \sin(\pi x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\
&= \int_0^2 x \left\{ \frac{\cos\left(1 - \frac{n}{2}\right)\pi x - \cos\left(1 + \frac{n}{2}\right)\pi x}{2} \right\} dx
\end{aligned}$$

per $n \neq 2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[x \cdot \frac{\sin\left(1 - \frac{n}{2}\right)\pi x}{\left(1 - \frac{n}{2}\right)\pi} - \frac{\sin\left(1 + \frac{n}{2}\right)\pi x}{\left(1 + \frac{n}{2}\right)\pi} \right]_0^2 \right. \\
&\quad \left. - \int_0^2 \left(\frac{\sin\left(1 - \frac{n}{2}\right)\pi x}{\left(1 - \frac{n}{2}\right)\pi} - \frac{\sin\left(1 + \frac{n}{2}\right)\pi x}{\left(1 + \frac{n}{2}\right)\pi} \right) dx \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\cos\left(1 - \frac{n}{2}\right)\pi x}{\left(1 - \frac{n}{2}\right)^2} - \frac{\cos\left(1 + \frac{n}{2}\right)\pi x}{\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2} \right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\cos(n\pi) - 1}{\left(1 - \frac{n}{2}\right)^2} - \frac{\cos(n\pi) - 1}{\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2} \right] \\
&= \frac{\cos(n\pi) - 1}{2\pi^2} \left(\frac{2n}{\left(1 - \frac{n^2}{4}\right)^2} \right) = \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi^2} \left(\frac{n}{\left(1 - \frac{n^2}{4}\right)^2} \right).
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi^3\sqrt{2}\left(1 - \frac{n^2}{4}\right)^2} \text{ per } n \neq 2.$$

Notiamo che

$$b_{2k} = 0; b_{2k+1} = \frac{-2}{\pi^3\sqrt{2}\left(1 - \frac{(2k+1)^2}{4}\right)^2}$$

Per $n = 2$,

$$2\pi\sqrt{2}b_2 = \int_0^2 x \left\{ \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} \right\} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\cos(2\pi) - 1}{2^2} \right] = 1 + 0 = 1.$$

In definitiva si ha:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \left\{ a_n \cos(n\pi\sqrt{2}t) + b_n \sin(n\pi\sqrt{2}t) \right\} \\
&= \sin(3\pi x) \cos(6\pi\sqrt{2}t) + \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sin(\pi x) \sin(2\sqrt{2}\pi t) \\
&\quad - \frac{2}{\pi^3\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{(2k+1)^2}{4}\right)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right) \sin\left((2k+1)\pi\sqrt{2}t\right).
\end{aligned}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
 Primo appello. Giugno 2026
 Svolgimento Tema 3
 A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Dedurre l'equazione di diffusione del calore in un mezzo continuo, non necessariamente omogeneo, in presenza di termini di sorgente, spiegando i passaggi della deduzione e il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta. (La funzione u incognita rappresenta la temperatura).

2. (9 punti) Si consideri il seguente *problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi*:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in [0, L] \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

3. (9 punti) Dare la definizione di soluzione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{k=1}^n b_k(x) u_{x_k} + c(x) u = f(x) \text{ in } \Omega,$$

(con $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ matrice simmetrica), facendo ipotesi precise su Ω e sulle funzioni coinvolte.

Quindi enunciare (con ipotesi precise su Ω e sulle funzioni coinvolte) e dimostrare, in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert, un teorema di buona posizione per questo problema. Si chiede di richiamare le definizioni delle proprietà delle forme bilineari che si utilizzano.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u(\rho, \theta) = 0 & \text{per } \rho < 3, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u(3, \theta) = \sin |\theta| & \text{per } \theta \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

determinando la soluzione in funzione di (ρ, θ) e riscrivendola nella forma il più possibile semplificata.

La funzione $f(\theta) = \sin|\theta|$ è pari in $[-\pi, \pi]$, quindi $b_n = 0$ e

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos(n\theta) d\theta.$$

Perciò

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{4}{\pi}.$$

Per $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{\sin[(n+1)\theta] - \sin[(n-1)\theta]\} d\theta$$

per $n \neq 1$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos[(n+1)\theta]}{(n+1)} + \frac{\cos[(n-1)\theta]}{(n-1)} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos[(n+1)\pi] - 1}{(n+1)} + \frac{\cos[(n-1)\pi] - 1}{(n-1)} \right] \\ &= \frac{\cos[(n+1)\pi] - 1}{\pi} \left(-\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n-1)} \right) \\ &= 2 \frac{\cos[(n+1)\pi] - 1}{\pi(n^2 - 1)}. \end{aligned}$$

In particolare,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 0 \\ a_{2k} &= -\frac{4}{\pi(4k^2 - 1)}. \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2\theta) d\theta = 0.$$

In definitiva,

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos(2k\theta) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\theta)}{4k^2 - 1}$$

e la soluzione del problema di Dirichlet è

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \left(\frac{\rho}{3}\right)^{2k} \cos(2k\theta) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{3}\right)^{2k} \frac{\cos(2k\theta)}{4k^2 - 1}. \end{aligned}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
 Primo appello. Giugno 2026
 Svolgimento Tema 4
 A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Enunciare e dimostrare il *teorema della media* per funzioni armoniche in n variabili.

2. (9 punti) Scrivere il *problema agli autovalori per il laplaciano* su un dominio limitato e lipschitziano Ω di \mathbb{R}^n , con condizione di Dirichlet nulla al bordo, e dimostrare le proprietà studiate che riguardano il segno degli autovalori e l'ortogonalità delle autofunzioni. Illustrare poi come interviene questo problema agli autovalori nella risoluzione di altri problemi per l'equazione del calore o delle onde (svolgendo esplicitamente calcoli opportuni, per una delle due equazioni, a scelta).

3. (9 punti) Si consideri il *problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata*:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Utilizzando i metodi studiati nel corso, determinare (presentando in dettaglio il procedimento risolutivo):

a. una formula di rappresentazione esplicita per l'*integrale generale dell'equazione*;

b. una formula di rappresentazione esplicita per la *soluzione del problema di Cauchy*, precisando le ipotesi su g, h sotto le quali u è soluzione classica del problema (senza dimostrare quest'affermazione).

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto con termine di sorgente:

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = e^{-|x|} & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(2x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si raccomanda di curare l'impostazione e riscrivere la soluzione ottenuta nella forma il più possibile esplicita e semplificata.

[*Suggerimento*: per calcolare l'integrale, occorrerà distinguere 3 casi, con opportune disuguaglianze in x, t].

La soluzione è assegnata da:

$$u(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds$$

con $g(x) = \sin(2x)$, $f(x, t) = e^{-|x|}$, $v = 3$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sin[2(x - 3t)] + \int_0^t e^{-|x-3(t-s)|} ds \\ &= \sin[2(x - 3t)] + \int_0^t e^{-|x-3s|} ds. \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'integrale. Per discutere il modulo che compare nell'integranda ($s \leq \frac{x}{3}$, sapendo che $s \in [0, t]$) occorre distinguere i casi:

1. $x < 0$. Allora per $s \in [0, t]$ è sempre $s > \frac{x}{3}$ e

$$\int_0^t e^{-|x-3s|} ds = \int_0^t e^{x-3s} ds = e^x \left[\frac{e^{-3s}}{-3} \right]_0^t = e^x \left(\frac{1 - e^{-3t}}{3} \right).$$

2. $0 < x < 3t$. Allora l'integrale va spezzato in due parti:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-|x-3s|} ds &= \int_0^{x/3} e^{-x+3s} ds + \int_{x/3}^t e^{x-3s} ds \\ &= e^{-x} \left[\frac{e^{3s}}{3} \right]_0^{x/3} + e^x \left[\frac{e^{-3s}}{-3} \right]_{x/3}^t \\ &= e^{-x} \left(\frac{e^x - 1}{3} \right) + e^x \left(\frac{e^{-x} - e^{-3t}}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} (2 - e^{-x} - e^{x-3t}). \end{aligned}$$

3. $x > 3t$. Allora per $s \in [0, t]$ è sempre $s < \frac{x}{3}$ e

$$\int_0^t e^{-|x-3s|} ds = \int_0^t e^{-x+3s} ds = e^{-x} \left[\frac{e^{3s}}{3} \right]_0^t = e^{-x} \left(\frac{e^{3t} - 1}{3} \right).$$

In definitiva:

$$u(x, t) = \begin{cases} \sin[2(x - 3t)] + \frac{1}{3} e^x (1 - e^{-3t}) & \text{per } x < 0 \\ \sin[2(x - 3t)] + \frac{1}{3} (2 - e^{-x} - e^{x-3t}) & \text{per } 0 < x < 3t \\ \sin[2(x - 3t)] + \frac{1}{3} e^{-x} (e^{3t} - 1) & \text{per } x > 3t \end{cases}$$