

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Secondo appello. Luglio 2026
Svolgimento Tema 1
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (8 punti) Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione $u(x, y)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali la formula ottenuta è valida.

2. (9 punti) Si consideri il problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Impostare la soluzione di questo problema col *metodo delle medie sferiche*, dimostrando come si ottiene, nel caso $n = 3$, la formula di Kirchhoff per questo problema. [Non è richiesta la dimostrazione dell'*equazione di Darboux*].

3. (9 punti) Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré e la sua conseguenza riguardo alla norma nello spazio $H_0^1(\Omega)$.

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il seguente problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & \text{per } x \in (0, 3), t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = x(3 - x) & \text{per } x \in (0, 3). \end{cases}$$

Si raccomanda di riscrivere la soluzione ottenuta nella forma il più possibile semplificata.

Calcolare il valore della temperatura limite per tempi lunghi (cioè $t \rightarrow +\infty$).

La soluzione è data da:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} a_n \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

con $D = 4, L = 3$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 4t}{9}} a_n \cos\left(\frac{n \pi x}{3}\right)$$

con

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x(3-x) \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{3} \int_0^3 x(3-x) \cos\left(\frac{n \pi x}{3}\right) dx$$

e per $t \rightarrow +\infty$,

$$u(t, x) \rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{3} \int_0^3 x(3-x) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{27}{2} - 9 \right) = \frac{3}{2}.$$

Calcoliamo per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3} \int_0^3 x(3-x) \cos\left(\frac{n \pi x}{3}\right) dx \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \left[x(3-x) \frac{3}{n \pi} \sin\left(\frac{n \pi x}{3}\right) \right]_0^3 - \int_0^3 (3-2x) \frac{3}{n \pi} \sin\left(\frac{n \pi x}{3}\right) dx \right\} \\ &= -\frac{2}{n \pi} \int_0^3 (3-2x) \sin\left(\frac{n \pi x}{3}\right) dx \\ &= -\frac{2}{n \pi} \left\{ \left[-(3-2x) \frac{3}{n \pi} \cos\left(\frac{n \pi x}{3}\right) \right]_0^3 - \int_0^3 2 \frac{3}{n \pi} \cos\left(\frac{n \pi x}{3}\right) dx \right\} \\ &= -\frac{6}{(n \pi)^2} \left\{ 3 [\cos(n \pi) + 1] - \left[2 \frac{3}{n \pi} \sin\left(\frac{n \pi x}{3}\right) \right]_0^3 \right\} \\ &= -\frac{18}{(n \pi)^2} [\cos(n \pi) + 1]. \end{aligned}$$

In particolare,

$$a_{2k+1} = 0; a_{2k} = -\frac{18}{4k^2 \pi^2} \cdot 2 = -\frac{9}{k^2 \pi^2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{3}{2} - \frac{18}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n \pi) + 1}{n^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 4t}{9}} \cos\left(\frac{n \pi x}{3}\right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{9}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-\frac{16k^2 \pi^2 t}{9}} \cos\left(\frac{2k \pi x}{3}\right). \end{aligned}$$

Esame di Metodi Analitici per le EDP
Secondo appello. Luglio 2026
Svolgimento Tema 2
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Esercizio	
Tot.	

Rispondere alle seguenti domande:

1. (9 punti) Enunciare con precisione le *identità di Green* (senza dimostrarle). Quindi enunciare e dimostrare (mediante le identità di Green) i *risultati di unicità* che si stabiliscono per vari problemi al contorno per l'*equazione di Poisson*, precisando le ipotesi su soluzione e dominio.

2. (8 punti) Dimostrare la seguente proprietà distribuzionale del nucleo del calore: definendo

$$\Gamma_D(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

si ha che:

$$\frac{\partial \Gamma_D}{\partial t} - D \Delta \Gamma_D = \delta_{(0,0)} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Enunciare quindi, senza dimostrazione, un risultato (che segue dal teorema precedente) di risolubilità per il problema di Cauchy per l'equazione del calore non omogenea, sotto ipotesi opportune su f :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D \Delta u = f(x, t) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

3. (9 punti) Si consideri il seguente *problema di Cauchy-Dirichlet* per l'equazione omogenea della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in [0, L] \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

La soluzione del problema, ottenuta col metodo di separazione delle variabili, è assegnata formalmente dalla seguente formula:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\}, \text{ con:}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sui dati iniziali $g(x), h(x)$ la $u(x, t)$ assegnata dalla formula precedente risolve il problema di Cauchy-Dirichlet.

b. Discutere in dettaglio le proprietà delle singole funzioni $u_n(x, t)$, in relazione al significato fisico del fenomeno: che tipo di vibrazione rappresenta u_n e che significato hanno i vari parametri [parole chiave da toccare nella risposta: periodo, frequenza, ampiezza, pulsazione, stazionarietà, punti nodali]. Come queste proprietà si riflettono nelle proprietà della u somma di infiniti termini?

Svolgere il seguente esercizio:

4. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto e reazione con termine di sorgente:

$$\begin{cases} u_t + 4u_x + 5u = e^{-2t} \cos x & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Studiare quindi il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè $t \rightarrow +\infty$).

La soluzione è assegnata da:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g(x - vt) e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} f(x - v(t-s), s) ds \\ \text{con } g(x) &= e^{-x^2}, f(x, t) = e^{-2t} \cos x, v = 4, \gamma = 5 \\ u(x, t) &= e^{-5t} e^{-(x-4t)^2} + \int_0^t e^{-5(t-s)} \cos(x - 4(t-s)) e^{-2s} ds. \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'integrale.

$$\int_0^t e^{-5(t-s)} \cos(x - 4(t-s)) e^{-2s} ds = e^{-5t} \int_0^t e^{3s} \cos(x - 4t + 4s) ds \equiv e^{-5t} I$$

con

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{4} e^{3s} \sin(x - 4t + 4s) \right]_0^t - \int_0^t \frac{3}{4} e^{3s} \sin(x - 4t + 4s) ds \\ &= \frac{1}{4} (e^{3t} \sin x - \sin(x - 4t)) \\ &\quad - \frac{3}{4} \left\{ \left[-\frac{1}{4} e^{3s} \cos(x - 4t + 4s) \right]_0^t + \int_0^t \frac{3}{4} e^{3s} \cos(x - 4t + 4s) ds \right\} \\ &= \frac{1}{4} (e^{3t} \sin x - \sin(x - 4t)) + \frac{3}{16} e^{3t} \cos x - \cos(x - 4t) - \frac{9}{16} I. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{16}{25} \left\{ \frac{1}{4} (e^{3t} \sin x - \sin(x-4t)) + \frac{3}{16} (e^{3t} \cos x - \cos(x-4t)) \right\} \\
e^{-5t} I &= \frac{16}{25} \left\{ \frac{1}{4} (e^{-2t} \sin x - e^{-5t} \sin(x-4t)) + \frac{3}{16} (e^{-2t} \cos x - e^{-5t} \cos(x-4t)) \right\} \\
&= \frac{1}{25} \{ 4 (e^{-2t} \sin x - e^{-5t} \sin(x-4t)) + 3 (e^{-2t} \cos x - e^{-5t} \cos(x-4t)) \} \\
&= \frac{1}{25} \{ e^{-2t} (4 \sin x + 3 \cos x) - e^{-5t} [4 \sin(x-4t) + 3 \cos(x-4t)] \}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= e^{-5t} e^{-(x-4t)^2} \\
&\quad + \frac{1}{25} \{ e^{-2t} (4 \sin x + 3 \cos x) - e^{-5t} [4 \sin(x-4t) + 3 \cos(x-4t)] \}
\end{aligned}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, per $t \rightarrow +\infty$,

$$u(x, t) \rightarrow 0.$$