

Esame di Metodi Analitici per le EDP  
Terzo appello. Settembre 2026  
Svolgimento  
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

|           | Punti |
|-----------|-------|
| Dom 1     |       |
| Dom 2     |       |
| Dom 3     |       |
| Esercizio |       |
| Tot.      |       |

**Rispondere alle seguenti domande:**

**1. (8 punti)** Dimostrare che, per ogni  $n \geq 3$ ,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n (n-2) |x|^{n-2}}$$

è una soluzione di  $\Delta \Gamma = -\delta_0$  in  $\mathbb{R}^n$ , nel senso delle distribuzioni.

Enunciare quindi (senza dimostrazione) il teorema che segue dal precedente e consente di risolvere l'equazione di Poisson  $\Delta u = f$  in  $\mathbb{R}^n$  sotto opportune ipotesi su  $f$ .

**2. (9 punti)** Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f(x, t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con  $v$  costante reale,  $f$  e  $g$  assegnate.

*a.* Si definisca il concetto di *soluzione classica* e *soluzione debole* dell'equazione e si dimostri che una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

*b.* Si dimostri l'esistenza di una soluzione debole nel caso  $f = 0$  e  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ .

**3. (9 punti)** Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per *problema variazionale astratto*. Quindi, nel caso particolare di una forma bilineare *simmetrica*, enunciare e dimostrare, sotto ulteriori opportune ipotesi, il teorema di buona posizione del problema.

**Svolgere il seguente esercizio:**

**4. (7 punti)** Risolvere il seguente problema di Cauchy per l'equazione non omogenea della corda vibrante illimitata, riscrivendo la soluzione nella forma il più possibile semplificata:

$$\begin{cases} u_{tt} - 7u_{xx} = \frac{x}{1+t} & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \frac{x}{1+x^2} & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Precisare quindi che regolarità ha la soluzione.

Applicando la formula di D'Alembert e la formula per l'equazione non omogenea si ha:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy + \int_0^t \left( \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy \right) ds$$

con  $c = \sqrt{7}$ ,  $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ,  $f(x, t) = \frac{x}{1+t}$ . Perciò:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{7}} \int_{x-\sqrt{7}t}^{x+\sqrt{7}t} \frac{y}{1+y^2} dy + \int_0^t \left( \frac{1}{2\sqrt{7}} \int_{x-\sqrt{7}(t-s)}^{x+\sqrt{7}(t-s)} \frac{y}{1+s} dy \right) ds.$$

Calcoliamo a parte i due integrali:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{7}} \int_{x-\sqrt{7}t}^{x+\sqrt{7}t} \frac{y}{1+y^2} dy &= \frac{1}{2\sqrt{7}} \left[ \frac{1}{2} \log(1+y^2) \right]_{x-\sqrt{7}t}^{x+\sqrt{7}t} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{7}} \log \left( \frac{1+(x+\sqrt{7}t)^2}{1+(x-\sqrt{7}t)^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left( \frac{1}{2\sqrt{7}} \int_{x-\sqrt{7}(t-s)}^{x+\sqrt{7}(t-s)} \frac{y}{1+s} dy \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{1+s} \frac{1}{2\sqrt{7}} \frac{1}{2} \left[ (x+\sqrt{7}(t-s))^2 - (x-\sqrt{7}(t-s))^2 \right] ds \\ &= \frac{1}{4\sqrt{7}} \int_0^t \frac{1}{1+s} 4x\sqrt{7}(t-s) ds = x \int_0^t \left( \frac{t-s}{1+s} \right) ds \\ &= x \int_0^t \left( \frac{t+1}{1+s} - 1 \right) ds = x \{ (t+1) \log(1+t) - t \}. \end{aligned}$$

In definitiva,

$$u(x, t) = \frac{1}{4\sqrt{7}} \log \left( \frac{1+(x+\sqrt{7}t)^2}{1+(x-\sqrt{7}t)^2} \right) + x \{ (t+1) \log(1+t) - t \}.$$

La soluzione è infinitamente derivabile per  $t > 0$ .