Domande-tipo di teoria per l'esame di Metodi Analitici per le EDP sull'intero programma

Marco Bramanti

April 13, 2022

Equazione di Laplace-Poisson

1. Illustrare i vari *modelli fisici* discussi nel corso che conducono all'equazione di Laplace-Poisson in 2 o 3 variabili, giustificando almeno in qualche caso le affermazioni fatte. Illustrare quindi le relazioni discusse nel corso tra la teoria delle funzioni armoniche in due variabili e quella delle *funzioni olomorfe*.

2. Per l'equazione di Poisson, illustrare i vari *problemi al contorno* che si possono studiare, spiegando qualche loro possibile significato fisico. Quindi enunciare e dimostrare (mediante le identità di Green) un *risultato di unicità* per alcuni di questi problemi, precisando le ipotesi su soluzione e dominio. Mostrare anche come si ricavano, a partire dal teorema della divergenza, le identità di Green utilizzate.

3. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0 \text{ per } \rho \in (0,r)\,, \theta \in [0,2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) \text{ per } \theta \in [0,2\pi]\,. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione $u(\rho,\theta)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

4. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0 \text{ per } \rho \in (0,r)\,, \theta \in [0,2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) \text{ per } \theta \in [0,2\pi]\,. \end{cases}$$

La soluzione, determinata formalmente col metodo di separazione di variabili, è assegnata dalla formula:

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\left(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right)\text{ dove:}\tag{1}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta\text{ per }n=0,1,2,..$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta\text{ per }n=1,2,3,..$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato al bordo f la u assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume il dato al bordo.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $\rho<r$, confrontandola con la regolarità del dato al bordo (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

c. Dedurre dalla formula di rappresentazione (1) la proprietà di valor medio delle funzioni armoniche su un cerchio.

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

5. Si consideri il problema di Neumann per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases}u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0\text{ per }\rho\in(0,r)\,,\theta\in[0,2\pi]\\ u_\rho(r,\theta)=f(\theta)\text{ per }\theta\in[0,2\pi]\,.\end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione $u(\rho,\theta)$, utilizzando il metodo studiato nel corso, e ricavando in particolare la *condizione di compatibilità* che dev'essere soddisfatta da f. La soluzione trovata con questo metodo è unica?

Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale -a parte la condizione di compatiblità-.

6. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases}u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0\text{ per }\rho\in(0,r)\,,\theta\in[0,2\pi]\\ u(r,\theta)=f(\theta)\text{ per }\theta\in[0,2\pi]\,.\end{cases}$$

La soluzione, determinata formalmente col metodo di separazione di variabili, è assegnata dalla formula:

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\left(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right)\text{ dove:}$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta\text{ per }n=0,1,2,..$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta\text{ per }n=1,2,3,..$$

Si chiede di ricavare, a partire da questa formula, una formula di rappresentazione integrale di u (*formula integrale di Poisson* sul cerchio).

Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento con cui si trasforma la formula di rappresentazione per serie nella formula di rappresentazione integrale, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali questo è lecito.

7. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0\text{ per }\rho\in(0,r),\theta\in[0,2\pi] \\ u(r,\theta)=f(\theta)\text{ per }\theta\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

La soluzione è assegnata formalmente dalla formula integrale di Poisson,

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(s)\left\{\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\theta-s)+\rho^2}\right\}ds.$$

Dimostrare che per ogni $f\in C^0[0,2\pi],f(0)=f(2\pi)$, la funzione $u(\rho,\theta)$ assegnata da questa formula è regolare all'interno del cerchio e tende a $f(\theta)$ per $\rho\to r^-$.

8. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0\text{ per }x\in\mathbb{R},y>0 \\ u(x,0)=f(x)\text{ per }x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione $u(x,y)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

9. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0\text{ per }x\in\mathbb{R},y>0 \\ u(x,0)=f(x)\text{ per }x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione, determinata formalmente col metodo della trasformata di Fourier, è assegnata dalla formula:

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(s)}{(x-s)^2+y^2}ds.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato al bordo f la u assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume il dato al bordo.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $y > 0$, confrontandola con la regolarità del dato al bordo (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

10. Determinare tutte le soluzioni radiali di $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n - \{0\}$ per $n \geq 2$, ricordando che il se u è una funzione radiale, il suo laplaciano in coordinate polari è uguale a:

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{n-1}{\rho} u_\rho.$$

[Suggerimento: da un certo punto in poi occorre distinguere i casi $n = 2$ e $n \geq 3$]

11. Dimostrare che, per ogni $n \geq 3$,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n (n-2) |x|^{n-2}}$$

è una soluzione di $\Delta\Gamma = -\delta_0$ in $\mathbb{R}^n$, nel senso delle distribuzioni. (Se preferite, fatelo solo per $n = 3$, con $\omega_3 = 4\pi$).

Dedurre da questo risultato un teorema che consente di risolvere l'equazione di Poisson $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ sotto opportune ipotesi su f.

12. Dopo aver dato la definizione di *funzione di Green* per il laplaciano su un dominio Ω e aver enunciato (senza dimostrazione) il "teorema dei tre potenziali" che consente di rappresentare una funzione u abbastanza regolare su Ω come somma di tre integrali, enunciare e dimostrare il teorema che consente di rappresentare una funzione regolare come somma di due integrali che coinvolgono la funzione di Green.

13. Dare la definizione di funzione di Green per il laplaciano, su un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Quindi:

A partire dall'espressione della soluzione fondamentale per $-\Delta$ in $\mathbb{R}^n$, data da:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n (n-2) |x|^{n-2}},$$

calcolare, col metodo delle immagini, la funzione di Green per il semispazio superiore di $\mathbb{R}^n$, cioè

$$\Omega = \left\{ (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0 \right\}.$$

Dedurne quindi l'espressione del nucleo di Poisson per il semispazio.

14. Enunciare e dimostrare il teorema della media per funzioni armoniche in n variabili, e dedurne il principio di massimo forte.

15. Enunciare il principio di massimo forte per funzioni armoniche in n variabili e, utilizzando questo, dimostrare la dipendenza continua della soluzione per il problema di Dirichlet (per l'equazione omogenea) e l'unicità (anche per l'equazione non omogenea) su un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$. Confrontare le ipotesi sotto cui si è dimostrata l'unicità con questo procedimento con le ipotesi sotto cui la si può dimostrare usando le identità di Green.

16. Enunciare e dimostrare il teorema sulla regolarità delle funzioni armoniche in n variabili, all'interno di un dominio, enunciando con precisione anche i risultati utilizzati nella dimostrazione.

17. Dopo aver enunciato (senza dimostrazione) il teorema della media per funzioni armoniche in n variabili, enunciare e dimostrare il suo teorema inverso, precisando i risultati che si utilizzano nella dimostrazione.

18. Enunciare e dimostrare il teorema di Liouville per funzioni armoniche in n variabili, enunciando con precisione anche i risultati utilizzati nella dimostrazione.

Equazione di diffusione

1. Dedurre l'equazione di diffusione del calore in un mezzo continuo, non necessariamente omogeneo, in presenza di termini di sorgente, spiegando i passaggi della deduzione e il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta. (La funzione u incognita rappresenta la temperatura).

Quindi presentare (senza farne la deduzione) l'equazione di diffusione di una sostanza in un mezzo continuo (la funzione u incognita rappresenta la concentrazione), in presenza di termini di sorgente, termini di trasporto e reazione, spiegando i passaggi della deduzione e il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta.

2. Enunciare e dimostrare il principio di massimo debole per l'equazione del calore e mostrare come da questo si deduce un risultato di unicità, confronto e stabilità per il problema di Cauchy-Dirichlet su un dominio opportuno.

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L] . \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

4. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L] . \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo di separazione delle variabili è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ con}$$
$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulla condizione iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $t > 0$, confrontandola con la regolarità della condizione iniziale (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

c. Discutere il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè: per $t \to +\infty$).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

5. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0,L] \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0,L]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

6. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0,L] \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0,L]. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo di separazione delle variabili è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ con}$$
$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulla condizione iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $t > 0$, confrontandola con la regolarità della condizione iniziale (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

c. Discutere il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè: per $t \to +\infty$).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

7. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

Suggerimento: è utile la formula per la trasformata di Fourier della Gaussiana n-dimensionale. Posto

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$$

si ha, per $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}.$$

8. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo della trasformata di Fourier è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} f(y)\, dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulla condizione iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale.

b. Discutere la regolarità della soluzione per $t > 0$, confrontandola con la regolarità della condizione iniziale (precisando le ipotesi su f sotto le quali vale ciò che si sta affermando).

c. Discutere, sotto opportune ipotesi, il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè: per $t \to +\infty$).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

9. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione *non omogenea* del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = F(x,t) \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

Ricordando che la soluzione del problema analogo per l'equazione *omogenea* (cioè con $F \equiv 0$), ottenuta col metodo della trasformata di Fourier, è assegnata (sotto opportune ipotesi) dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} f(y)\, dy$$

determinare una formula risolutiva per il problema (2). Non si chiede di dimostrare la validità effettiva della formula trovata sotto opportune ipotesi, solo di determinare tale formula con uno dei metodi visti nel corso, presentando il procedimento in dettaglio.

10. Si consideri il nucleo del calore:

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} \text{ per } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \end{cases}$$

Dimostrare che risolve, nel senso delle distribuzioni $D'(\mathbb{R}^{n+1})$, l'equazione

$$K_t - D\Delta K = \delta_{(0,0)} \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dedurre da questo fatto un teorema di esistenza per il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f(x,t) \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

sotto ipotesi opportune su f.

11. Si consideri il seguente problema per l'equazione di diffusione sulla retta, con termini di trasporto e reazione:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} + vu_x + \gamma u = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con $\gamma > 0$ e $v \in \mathbb{R}$. Determinare una formula risolutiva del problema, con uno dei metodi visti nel corso. (Se è utile, si può dare per nota, senza bisogno di ricavarla, la formula che assegna la soluzione nel caso $v = \gamma = 0$, cioè per l'equazione di sola diffusione).

[Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale].

Una volta ottenuta la formula risolutiva per questo problema, mostrare come da questa si deduce una formula risolutiva nel caso non omogeneo, cioè:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} + vu_x + \gamma u = f(x,t) \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

12. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sul rettangolo:

$$\begin{cases} u_t - D\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 0 \text{ per } (x, y) \in \Omega = (0, a) \times (0, b), t > 0 \\ u(x, y, t) = 0 \text{ per } (x, y) \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, y, 0) = g(x, y) \text{ per } (x, y) \in \Omega. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

Equazione del trasporto

1. Si consideri l'*equazione lineare del trasporto*, non omogenea, con termine di reazione:

$$u_t + vu_x + \gamma u = f(t, x) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

con v, γ costanti reali, $\gamma > 0$, f funzione assegnata, $u(x, t)$ funzione incognita. Dopo aver spiegato il significato fisico dell'equazione e dei vari termini in essa presenti, determinare l'integrale generale di quest'equazione, utilizzando i metodi visti nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, precisando anche le ipotesi sotto le quali vale.

[Suggerimento: procedere per passi successivi, a cominciare dal caso $f = 0, \gamma = 0$].

2. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x, t) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v costante reale, f e g assegnate.

a. Si definisca il concetto di *soluzione classica* e *soluzione debole* dell'equazione e si dimostri che una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

b. Si dimostri che una soluzione debole del problema, se è sufficientemente regolare (precisare in che senso) è anche soluzione debole.

3. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x, t) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v costante reale, f e g assegnate. La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t - s), s)\, ds. \tag{3}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su f e g la u assegnata da (3) è una soluzione classica del problema.

b. Si definisca il concetto di *soluzione debole* dell'equazione e si dimostri sotto quali ipotesi la u assegnata dalla (3) è soluzione debole del problema. [E' sufficiente dimostrarlo nel caso $f = 0$].

Equazione delle onde

1. Dedurre l'*equazione della corda vibrante*, in presenza di una forza esterna, precisando le ipotesi fisiche sotto cui vale.

Dedurre poi l'espressione integrale dell'energia meccanica totale di un segmento $[0, L]$ della corda vibrante, in assenza di forze esterne.

2. Descrivere i principali problemi ai limiti e ai valori iniziali che si affrontano per l'equazione della corda vibrante limitata (cioè sul segmento). Enunciare e dimostrare un risultato di unicità per i problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann per quest'equazione.

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in [0, L] \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

4. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in [0, L] \end{cases}$$

La soluzione del problema, ottenuta col metodo di separazione delle variabili, è assegnata formalmente dalla seguente formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\}, \text{ con:}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sulle condizioni iniziali $f(x), g(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve il problema di Cauchy-Dirichlet precedente.

b. Discutere in dettaglio le proprietà delle singole funzioni $u_n(x,t)$, in relazione al significato fisico del fenomeno: che tipo di vibrazione rappresenta u_n e che significato hanno i vari parametri [parole chiave da toccare nella risposta: periodo, frequenza, ampiezza, pulsazione, stazionarietà, punti nodali].

c. Discutere che significato fisico ha il fatto che la soluzione u sia somma degli infiniti termini u [qualche parola chiave da toccare nella risposta: periodicità, frequenza fondamentale, armoniche].

5. Si consideri il seguente problema di Cauchy per la corda vibrante con condizioni di Neumann agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in [0, L] \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in [0, L] \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione, utilizzando i metodi studiati nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

6. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Utilizzando i metodi studiati nel corso, determinare (presentando in dettaglio il procedimento risolutivo):

a. una formula di rappresentazione esplicita per l'integrale generale dell'equazione;

b. una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione del problema di Cauchy, precisando le ipotesi su f, g sotto le quali u è soluzione classica del problema.

7. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy. \tag{4}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su g e h la u assegnata da (4) è una soluzione classica del problema.

b. Dimostrare una stima di stabilità per la soluzione del problema.

c. Spiegare i concetti di dominio di dipendenza e dominio di influenza.

8. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata con una forzante esterna:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5}$$

Ricordando che la soluzione del problema nel caso dell'equazione omogenea, cioè per $f(x,t) \equiv 0$, è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy,$$

determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione di (5) (è sufficiente il caso $g = h = 0$) e dimostrare sotto quali ipotesi su f tale formula è valida.

9. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a. Dare la definizione di soluzione debole di questo problema, arrivando alla definizione in modo da mostrare che ogni soluzione classica è soluzione debole.

b. Mostrare che ogni soluzione debole sufficientemente regolare (precisare) è anche soluzione classica.

c. Mostrare che la soluzione assegnata dalla formula di D'Alembert nel caso $h = 0$,

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2}$$

è una soluzione debole del problema di Cauchy.

10. Si consideri il problema di Cauchy-Dirichlet per la membrana vibrante rettangolare fissata al bordo:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0 \text{ per } (x,y) \in \Omega = (0,a) \times (0,b), t > 0 \\ uu(x,y,t) = 0 \text{ per } (x,y) \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,y,0) = g(x,y) \text{ per } (x,y) \in \Omega \\ u_t(x,y,0) = h(x,y) \text{ per } (x,y) \in \Omega. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

11. Si consideri il problema di Cauchy-Dirichlet per la membrana vibrante rettangolare fissata al bordo:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0 \text{ per } (x,y) \in \Omega = (0,a) \times (0,b), t > 0 \\ u(x,y,t) = 0 \text{ per } (x,y) \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y) \text{ per } (x,y) \in \Omega \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \text{ per } (x,y) \in \Omega. \end{cases}$$

La soluzione del problema, determinata col metodo di separazione delle variabili, è assegnata formalmente dalla formula:

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}(x,y,t)\,,\text{con:}$$

$$u_{n,m}(x,y,t)=\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cdot$$
$$\cdot\left\{a_{n,m}\sin\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\pi ct\right)+b_{n,m}\sin\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\pi ct\right)\right\},$$

dove:

$$a_{n,m}=\frac{4}{ab}\int_0^a\left(\int_0^b f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dy\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

$$b_{n,m}=\frac{4}{ab\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\pi c}\int_0^a\left(\int_0^b g(x,y)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dy\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx.$$

Si chiede di:

a. Discutere in dettaglio le proprietà delle singole funzioni $u_{n,m}(x,y,t)$, in relazione al significato fisico del fenomeno: che tipo di vibrazione rappresenta $u_{n,m}$ e che significato hanno i vari parametri [qualche parola chiave da toccare nella risposta: periodo, frequenza, ampiezza, pulsazione, stazionarietà, linee nodali].

b. Discutere che significato fisico ha il fatto che la soluzione u sia somma degli infiniti termini $u_{n,m}$ [qualche parola chiave da toccare nella risposta: periodicità, frequenza fondamentale], eventualmente confrontando anche con quanto accade per la *corda vibrante* fissata agli estremi.

12. Scrivere il generico problema di Cauchy-Dirichlet e di Cauchy-Neumann per l'equazione delle onde su un cilindro $\Omega\times(0,T)$ con $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ domino limitato. Che significato fisico può avere per $n=2$? Enunciare e dimostrare un *teorema di unicità* per questo problema sotto opportune ipotesi su Ω.

13. Scrivere il *problema agli autovalori per il laplaciano* su un dominio limitato e lipschitziano Ω di $\mathbb{R}^n$, con condizione di Dirichlet nulla al bordo, e dimostrare che gli eventuali autovalori sono negativi e che autofunzioni relative ad autovalori distinti sono ortogonali in $L^2(\Omega)$. Spiegare poi come interviene questo problema agli autovalori nella risoluzione di altri problemi per l'equazione del calore o delle onde.

14. Si consideri il problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases}u_{tt}-c^2\Delta u=0 \text{ per } \underline{x}\in\mathbb{R}^n,t>0\\ u(x,0)=g(x) \text{ per } \underline{x}\in\mathbb{R}^n\\ u_t(x,0)=h(x) \text{ per } \underline{x}\in\mathbb{R}^n.\end{cases}\qquad(6)$$

a. Mostrare come questo problema si può ricondurre, per passi successivi, alla soluzione del suo caso particolare in cui $g=0$.

b. Dare la definizione di soluzione fondamentale $\Gamma(x,t)$ per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n$.

c. Mostrare come, supponendo di conoscere Γ, si può scrivere la soluzione del problema (6), giustificando formalmente la formula proposta.

15. Si consideri l'equazione delle onde

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

Ricavare la forma più generale di *onda sferica*, cioè soluzione dell'equazione precedente che sia radiale in x.

16. Si consideri l'equazione delle onde

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

a. Dopo aver dato la definizione di soluzione fondamentale dell'equazione delle onde (come soluzione di un opportuno problema di Cauchy), scrivere l'espressione analitica della soluzione fondamentale (non si chiede di *ricavarla*).

b. Dedurre dall'espressione della soluzione fondamentale la *formula di Kirchhoff* per la soluzione del problema di Cauchy globale.

c. Fare le opportune osservazioni sulla formula di Kirchhoff riguardo a: dominio di dipendenza e di influenza; regolarità della soluzione a confronto con la regolarità dei dati iniziali.

17. Si consideri il problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ per } \underline{x} \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(\underline{x}, 0) = f(\underline{x}) \text{ per } \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(\underline{x}, 0) = g(\underline{x}) \text{ per } \underline{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

a. Ricavare la formula (di Poisson) che assegna formalmente la soluzione di questo problema utilizzando il *metodo della discesa*, a partire dalla formula di Kirchhoff

$$u(\underline{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\underline{x})} f(\underline{\sigma})\, d\underline{\sigma} \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\underline{x})} g(\underline{\sigma})\, d\underline{\sigma}$$

che assegna la soluzione dell'analogo problema in $\mathbb{R}^3$. [Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale].

b. Ricavare dalla formula di Poisson scritta al punto precedente l'espressione analitica della soluzione fondamentale per l'operatore delle onde in $\mathbb{R}^2$.

c. Che confronto si può fare tra il dominio di dipendenza / influenza nel caso bi- e tri-dimensionale?

Proprietà generali delle equazioni lineari del second'ordine

1. Discutere, per un'equazione lineare, del second'ordine, a coefficienti variabili (in un numero qualsiasi di variabili), la nozione di equazione *di tipo ellittico, parabolico o iperbolico*, facendo anche esempi. In particolare, chiarire la differenza tra *operatore uniformemente ellittico in un dominio* e *operatore ellittico degenere*, e la differenza tra *operatore parabolico* e *operatore ultraparabolico*, facendo anche esempi. Spiegare alcune proprietà degli operatori di Laplace, del calore, delle onde, che valgono, sotto opportune ipotesi, rispettivamente per gli operatori ellittici, parabolici, iperbolici.

2. Dopo aver brevemente discusso il concetto di moto browniano, illustrare i significati probabilistici che sono stati discussi nel corso per l'equazione del calore e l'equazione di Laplace.

Spazi di Sobolev

1. Dare la definizione di derivata debole di una funzione, in una o più variabili, e confrontare questa nozione con quella di derivata distribuzionale. Dare la definizione di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$. Fare esempi di funzioni discontinue che appartengono o non appartengono a spazi $H^1(\Omega)$, in dimensione opportuna.

2. Dare la definizione di derivata debole e di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$ e dimostrare che $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Enunciare poi il teorema di caratterizzazione dello spazio $H^1(a,b)$ (in una dimensione). Definire quindi gli spazi $H^m(\Omega)$ per $m = 2, 3, 4....$

3. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti tra una funzione $H^1(\Omega)$ e una $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré e la sua conseguenza riguardo alla norma nello spazio $H_0^1(\Omega)$.

4. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare il teorema di caratterizzazione distribuzionale del duale $H^{-1}(\Omega)$ di $H_0^1(\Omega)$ e fare esempi di elementi di $H^{-1}(\Omega)$ che non sono funzioni.

5. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$ e dello spazio $H_0^1(\Omega)$, enunciare con precisione i vari risultati visti nel corso che riguardano l'approssimazione di funzioni $H^1(\Omega)$ con funzioni regolari.

6. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$ e dello spazio $H_0^1(\Omega)$, discutere il concetto di *traccia* di una funzione $H^1(\Omega)$ e enunciare con precisione i risultati visti nel corso a questo riguardo. Quindi, enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti per due funzioni $H^1(\Omega)$.

Spazi di Hilbert

1. Dare la definizione di operatore lineare continuo tra due spazi vettoriali normati, funzionale lineare continuo su uno spazio vettoriale normato, spazio duale di uno spazio vettoriale normato. Quindi enunciare e dimostrare il teorema di Riesz di rappresentazione dei funzionali lineari continui su spazi di Hilbert.

2. Dare la definizione di *forma bilineare* su uno *spazio prehilbertiano*, e definire i concetti di forma bilineare *simmetrica*, *continua*, *coerciva*, *non negativa.* Fare poi esempi e contresempi di forme bilineari (su uno spazio prehilbertiano o di Hilbert) che sono o non sono simmetriche, continue, coercive, non negative.

3. Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, enunciare e dimostrare il teorema che afferma che una forma bilineare, sotto opportune ipotesi, definisce un prodotto scalare che induce una norma equivalente a quella di partenza. Quindi, dire cosa si intende per *problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert* e, nel caso particolare di una forma bilineare *simmetrica*, dimostrare, sotto opportune ipotesi, il teorema di buona posizione del problema (mediante il teorema di rappresentazione di Riesz).

4. Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare e dimostrare il *teorema di Lax-Milgram*, richiamando le definizioni dei vari concetti coinvolti.

5. Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per problema variazionale astratto su uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare e dimostrare il teorema che mette in relazione la soluzione di un problema variazionale astratto con un problema di minimizzazione di un opportuno funzionale.

Formulazione debole di problemi ai limiti per equazioni ellittiche

1. Dare la formulazione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + d(x) u = f \text{ in } \Omega,$$

(con $a(x), d(x)$ funzioni scalari di x) ricavandola dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari. Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert. La soluzione del problema risolve anche un problema di minimo di funzionale? Spiegare.

2. Dare la formulazione debole del problema di Neumann con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + d(x) u = f \text{ in } \Omega,$$

(con $a(x)$ scalare) ricavandola dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari. Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert. La soluzione del problema risolve anche un problema di minimo di funzionale? Spiegare.

3. Dare la formulazione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (\mathbf{A}(x) \nabla u(x)) + \underline{c}(x) \cdot \nabla u + d(x) u = f \text{ in } \Omega,$$

(con $\mathbf{A}(x)$ matrice simmetrica, $\underline{c}(x)$ vettore e $d(x)$ scalare, funzioni di x). Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert. Infine, mostrare come si modifica il procedimento nel caso in cui il dato al bordo non è zero.

4. Dare la formulazione debole del problema di Neumann con dato al bordo g per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (\mathbf{A}(x) \nabla u(x)) + \underline{c}(x) \cdot \nabla u + d(x) u = f \text{ in } \Omega,$$

(con $\mathbf{A}(x)$ matrice simmetrica, $\underline{c}(x)$ vettore e $d(x)$ scalare, funzioni di x). Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert.