Domande di teoria e tipi di esercizi per l'esame di Metodi Analitici per le EDP. (A.A. 2024/25)

Marco Bramanti

2 aprile 2025

1 Equazione di Laplace-Poisson

1. Per l'*equazione di Poisson*, illustrare i vari *problemi al contorno* che si possono studiare, spiegando qualche loro possibile significato fisico. Quindi enunciare e dimostrare (mediante le identità di Green) un *risultato di unicità* per alcuni di questi problemi, precisando le ipotesi su soluzione e dominio.

2. Enunciare e dimostrare le identità di Green. Quindi enunciare e dimostrare (mediante le identità di Green) i risultati di unicità che si stabiliscono per vari problemi al contorno per l'*equazione di Poisson*.

3. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho} u_\rho + \dfrac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 & \text{per } \rho \in (0,r), \theta \in [0,2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) & \text{per } \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione $u(\rho,\theta)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

4. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho} u_\rho + \dfrac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 & \text{per } \rho \in (0,r), \theta \in [0,2\pi] \\ u(r,\theta) = f(\theta) & \text{per } \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

La soluzione, determinata formalmente col metodo di separazione di variabili, è assegnata dalla formula:

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\left(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right)\text{ dove:}\tag{1}$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta\text{ per }n=0,1,2,..$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta\text{ per }n=1,2,3,..$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato al bordo f la u assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e quale regolarità ha la soluzione per $\rho<r$.

b. Dimostrare sotto quali ipotesi e in quali sensi la soluzione assume il dato al bordo.

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

5. Si consideri il problema di Neumann per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0 & \text{per }\rho\in(0,r),\theta\in[0,2\pi] \\ \frac{\partial u}{\partial\rho}(r,\theta)=f(\theta) & \text{per }\theta\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione $u(\rho,\theta)$, utilizzando il metodo studiato nel corso, e ricavando in particolare la *condizione di compatibilità* che dev'essere soddisfatta da f. La soluzione trovata con questo metodo è unica?

Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale -a parte la condizione di compatiblità-.

6. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r che, in coordinate polari, si scrive così:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0 & \text{per }\rho\in(0,r),\theta\in[0,2\pi] \\ u(r,\theta)=f(\theta) & \text{per }\theta\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

La soluzione, determinata formalmente col metodo di separazione di variabili, è assegnata dalla formula:

$$
\begin{aligned}
u(\rho,\theta) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right) \text{ dove:}\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \text{ per } n=0,1,2,..\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta \text{ per } n=1,2,3,..
\end{aligned}
$$

Mostrare come a partire dalla formula risolutiva precedente si può ricavare la formula integrale di Poisson,

$$
u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left\{\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\theta-s)+\rho^2}\right\}ds.
$$

Enunciare dei risultati precisi che illustrano la relazione tra la formula risolutiva per serie e la formula risolutiva integrale, e l'utilità della formula integrale di Poisson nella risoluzione del problema di Dirichlet.

7. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$
\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & \text{per } x\in\mathbb{R}, y>0\\ u(x,0)=f(x) & \text{per } x\in\mathbb{R}.\end{cases}
$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione $u(x,y)$, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

8. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$
\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & \text{per } x\in\mathbb{R}, y>0\\ u(x,0)=f(x) & \text{per } x\in\mathbb{R}.\end{cases}
$$

La soluzione, determinata formalmente col metodo della trasformata di Fourier, è assegnata dalla formula:

$$
u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(s)}{(x-s)^2+y^2}ds.
$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato al bordo f la u assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e qual è la regolarità della soluzione per $y>0$.

b. Dimostrare sotto quali ipotesi e in quali sensi la soluzione assume il dato al bordo.

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

9. Enunciare e dimostrare il *principio di massimo* per l'equazione di Poisson. Dedurre da questo un *teorema di unicità* per il problema di Dirichlet. Confrontare le ipotesi sotto cui si è dimostrata l'unicità con questo procedimento con le ipotesi sotto cui la si può dimostrare usando le identità di Green.

10. Enunciare (senza dimostrazione) il *principio di massimo* per l'*equazione di Poisson*. Quindi enunciare e dimostrare un *teorema di dipendenza continua* per il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.

11. Enunciare e dimostrare il *teorema della media* per funzioni armoniche in n variabili. Dimostrare anche l'*equivalenza tra le due proprietà di media.*

12. Enunciare e dimostrare il *teorema di regolarità delle funzioni armoniche* in un aperto di $\mathbb{R}^n$.

13. Enunciare e dimostrare il *teorema inverso della media.* Spiegare quindi dove, nel corso, è stato utilizzato questo teorema.

14. Determinare *tutte* le soluzioni radiali dell'equazione $\Delta u = 0$ nello spazio $\mathbb{R}^n$ privato dell'origine, per $n \geq 2$. Che significato fisico possono avere queste funzioni?

15. Dimostrare che, per ogni $n \geq 3$,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n (n-2) |x|^{n-2}}$$

è una soluzione di $\Delta\Gamma = -\delta_0$ in $\mathbb{R}^n$, nel senso delle distribuzioni.

Dedurre da questo risultato un teorema che consente di risolvere l'equazione di Poisson $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ sotto opportune ipotesi su f.

16. La *funzione di Green per il laplaciano*, su un un dominio Ω, e il nucleo di Poisson: introdurre questi concetti dandone la definizione e illustrandone le proprietà e il ruolo, in relazione al problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.

[Questa domanda riguarda il caso di un dominio Ω di *forma* generica, non i casi specifici -sfera e semispazio- in cui conosciamo l'espressione esplicita della funzione di Green].

17. Enunciare con precisione e dimostrare il teorema di risolubilità classica per il *problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sulla sfera* $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ mediante la *formula integrale di Poisson*:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{f(z)}{|x - z|^n} dS(z).$$

2 Equazione di diffusione

1. Dedurre l'equazione di diffusione del calore in un mezzo continuo, non necessariamente omogeneo, in presenza di termini di sorgente, spiegando i passaggi della deduzione e il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta. (La funzione u incognita rappresenta la temperatura).

Quindi presentare (senza farne la deduzione) l'equazione di diffusione di una sostanza in un mezzo continuo, in presenza di termini di sorgente, termini di trasporto e reazione, spiegando il significato dei vari termini nell'equazione ottenuta.

2. Enunciare e dimostrare il *principio di massimo debole per l'equazione del calore* e mostrare come da questo si deduce un risultato di unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet su un dominio opportuno.

3. Enunciare (senza dimostrazione) il *principio di massimo debole per l'equazione del calore*. Quindi enunciare e dimostrare come conseguenze di questo teorema il risultato di *unicità* e la stima di *stabilità* per il problema di Cauchy-Dirichlet su un dominio opportuno.

4. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{per } x \in (0, L). \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

5. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{per } x \in (0, L). \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo di separazione delle variabili è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ con}$$
$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione, e qual è la regolarità della soluzione per $t > 0$.

b. Discutere sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale, dimostrando le affermazioni fatte.

c. Discutere il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè: per $t \to +\infty$).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

6. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{per } x \in (0, L)\,. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

7. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore su una sbarra:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{per } x \in (0, L)\,. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo di separazione delle variabili è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ con}$$
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato iniziale $f(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e qual è la regolarità della soluzione per $t > 0$.

b. Discutere sotto quali ipotesi e in quali sensi assume la condizione iniziale, dimostrando le affermazioni fatte.

c. Discutere il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè: per $t \to +\infty$).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

8. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 & \text{per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

Suggerimento: è utile la formula per la trasformata di Fourier della Gaussiana n-dimensionale. Posto

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, e^{-2\pi i x \xi} dx$$

si ha, per $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}.$$

9. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 & \text{per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene col metodo della trasformata di Fourier è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y)\, dy.$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sul dato iniziale $g(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve l'equazione e qual è la regolarità della soluzione per $t > 0$.

b. Dimostrare sotto quali ipotesi e in quali sensi $u(x,t)$ assume la condizione iniziale.

c. Discutere, sotto opportune ipotesi, il comportamento della soluzione per tempi lunghi (cioè: per $t \to +\infty$).

Si chiede di giustificare tutte le affermazioni fatte, in base a opportuni teoremi.

10. Si consideri il seguente problema di Cauchy per l'equazione *non omogenea* del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f(x,t) & \text{per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

Ricordando che la soluzione del problema analogo per l'equazione *omogenea* (cioè con $f \equiv 0$), ottenuta col metodo della trasformata di Fourier, è assegnata (sotto opportune ipotesi) dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y)\, dy$$

determinare una formula risolutiva per il problema (2) col *metodo di Duhamel*. Si chiede di presentare in dettaglio il metodo di Duhamel e il modo in cui si arriva a una formula risolutiva esplicita per la soluzione u. (Non si chiede di dimostrare che sotto opportune ipotesi su f la u trovata è soluzione).

11. Discutere le proprietà del nucleo del calore dal punto di vista distribuzionale. In particolare, si chiede di dimostrare che definendo

$$\Gamma_D(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

si ha che:

$$\frac{\partial \Gamma_D}{\partial t} - D\Delta\Gamma_D = \delta_{(0,0)} \text{ in } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^{n+1}\right).$$

Dedurre da questo teorema un risultato di risolubilità per il problema di Cauchy per l'equazione del calore non omogenea, sotto ipotesi opportune su f:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

3 Equazione del trasporto

1. Si consideri il problema di Cauchy per l'*equazione lineare del trasporto*, non omogenea, con termine di reazione:

$$\begin{cases} u_t + vu_x + \gamma u = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v, γ costanti reali, $\gamma > 0$, f, g funzioni assegnate, $u(x,t)$ funzione incognita. Dopo aver spiegato il significato fisico dell'equazione e dei vari termini in essa presenti, determinare la soluzione del problema, utilizzando i metodi visti nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione. (Non si chiede di dimostrare che, sotto opportune ipotesi, la funzione determinata è effettivamente soluzione).

[Suggerimento: procedere per passi successivi, a cominciare dal caso $f = 0, \gamma = 0$].

2. Si consideri il problema di Cauchy per l'*equazione lineare del trasporto*, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v costante reale, f, g funzioni assegnate, $u(x,t)$ funzione incognita. Determinare la soluzione del problema, utilizzando i metodi visti nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione e quindi dimostrare che, sotto opportune ipotesi su f e g, è effettivamente soluzione.

[Suggerimento: procedere per passi successivi, a cominciare dal caso $f = 0$].

3. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v costante reale, f e g assegnate.

a. Si definisca il concetto di *soluzione classica* e *soluzione debole* dell'equazione e si dimostri che una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

b. Si dimostri che una soluzione debole del problema, sotto opportune ipotesi di regolarità su u, f, g (precisare quali) è anche soluzione debole.

4. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto, non omogenea:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con v costante reale, f e g assegnate.

a. Si definisca il concetto di *soluzione classica* e *soluzione debole* dell'equazione e si dimostri che una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

b. Si dimostri l'esistenza di una soluzione debole nel caso $f = 0$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

4 Equazione delle onde

1. Dedurre l'*equazione della corda vibrante*, in presenza di una forza esterna, precisando le ipotesi fisiche sotto cui vale.

Dedurre poi l'espressione integrale dell'energia meccanica totale di un segmento $[0, L]$ della corda vibrante, in assenza di forze esterne.

2. Descrivere i principali problemi ai limiti e ai valori iniziali che si affrontano per l'equazione della corda vibrante limitata (cioè sul segmento). Enunciare e dimostrare un risultato di unicità per i problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann per quest'equazione.

3. Si consideri il seguente *problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi*:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione, utilizzando il metodo studiato nel corso. Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale.

4. Si consideri il seguente *problema di Cauchy-Dirichlet per della corda vibrante fissata agli estremi*:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in (0, L) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L]. \end{cases}$$

La soluzione del problema, ottenuta col metodo di separazione delle variabili, è assegnata formalmente dalla seguente formula:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left\{a_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right\},\text{ con:}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\\ b_n&=\frac{2}{n\pi c}\int_0^L h(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.\end{aligned}$$

Si chiede di:

a. Dimostrare sotto quali ipotesi sui dati iniziali $g(x), h(x)$ la $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente risolve il problema di Cauchy-Dirichlet.

b. Discutere in dettaglio le proprietà delle singole funzioni $u_n(x,t)$, in relazione al significato fisico del fenomeno: che tipo di vibrazione rappresenta u_n e che significato hanno i vari parametri [parole chiave da toccare nella risposta: periodo, frequenza, ampiezza, pulsazione, stazionarietà, punti nodali]. Come queste proprietà si riflettono nelle proprietà della u somma di infiniti termini?

5. Si consideri il *problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata*:

$$\begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}=0 & \text{per } t>0, x\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=g(x) & \text{per } x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,0)=h(x) & \text{per } x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Utilizzando i metodi studiati nel corso, determinare (presentando in dettaglio il procedimento risolutivo):

a. una formula di rappresentazione esplicita per l'*integrale generale dell'equazione*;

b. una formula di rappresentazione esplicita per la *soluzione del problema di Cauchy*, precisando le ipotesi su $g.h$ sotto le quali u è soluzione classica del problema (senza dimostrare quest'affermazione).

6. Si consideri il *problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata*:

$$\begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}=0 & \text{per } t>0, x\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=g(x) & \text{per } x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,0)=h(x) & \text{per } x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

La soluzione del problema è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t)=\frac{g(x+ct)+g(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}h(y)\,dy. \tag{3}$$

a. Dimostrare sotto quali ipotesi su g e h la u assegnata da (3) è una soluzione classica del problema.

b. Dimostrare una stima di stabilità per la soluzione del problema.

c. Spiegare i concetti di dominio di dipendenza e dominio di influenza.

7. Si consideri il *problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante illimitata* con una forzante esterna:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & \text{per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

Ricordando che la soluzione del problema nel caso dell'equazione omogenea, cioè per $f(x,t) \equiv 0$, è assegnata, formalmente, dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy,$$

determinare una formula di rappresentazione esplicita per la soluzione di (4) (è sufficiente il caso $g = h = 0$) e enunciare (senza dimostrazione) sotto quali ipotesi su f tale formula è valida.

8. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione (omogenea) della corda vibrante illimitata:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a. Si definisca il concetto di *soluzione classica* e *soluzione debole* del preoblema e si dimostri che una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

b. Si enunci un risultato preciso che afferma che sotto opportune ipotesi vale anche il viceversa.

c. Si enunci un risultato preciso che afferma l'esistenza di una soluzione debole sono opportune ipotesi (più deboli di quelle classiche) su g, h.

9. Scrivere il generico *problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde su un cilindr*o $\Omega \times (0,T)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domino limitato. Che significato fisico può avere per $n = 2$? Enunciare e dimostrare un *teorema di unicità* per questo problema sotto opportune ipotesi su Ω.

10. Scrivere il *problema agli autovalori per il laplaciano* su un dominio limitato e lipschitziano Ω di $\mathbb{R}^n$, con condizione di Dirichlet nulla al bordo, e dimostrare le proprietà studiate che riguardano il segno degli autovalori e l'ortogonalità delle autofunzioni. Spiegare poi come interviene questo problema agli autovalori nella risoluzione di altri problemi per l'equazione del calore o delle onde.

11. Si consideri il *problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde in* $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5}$$

Mostrare come questo problema si può ricondurre, per passi successivi, alla soluzione del suo caso particolare in cui $g = 0$ e $f = 0$.

12. Si consideri il problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Impostare la soluzione di questo problema col *metodo delle medie sferiche*, dimostrando come si ottiene, nel caso $n = 3$, la formula di Kirchhoff. [Non è richiesta la dimostrazione dell'*equazione di Darboux*].

13. Si consideri il *problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde in* $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

a. Scrivere (senza ricavarla) la *formula di Kirchhoff*, enunciando (senza dimostrazione) le ipotesi sotto le quali tale formula assegna effettivamente la soluzione del problema di Cauchy.

b. Commentare quanto enunciato nel punto *a* dal punto di vista della *regolarità della soluzione e delle condizioni iniziali.*

c. Commentare quanto enunciato nel punto *a* dal punto di vista del *dominio di dipendenza e di influenza.*

14. Si consideri il *problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde in* $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

a. Ricavare la formula (di Poisson) che assegna formalmente la soluzione di questo problema utilizzando il *metodo della discesa*, a partire dalla formula di Kirchhoff

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} g(y)\, dS(y)\right] + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} h(y)\, dS(y)$$

che assegna la soluzione dell'analogo problema in $\mathbb{R}^3$. [Si richiede di presentare in dettaglio il procedimento risolutivo, fino a determinare la formula esplicita che assegna la soluzione, senza necessità di precisare le ipotesi sotto le quali vale].

b. Che confronto si può fare tra il dominio di dipendenza / influenza nel caso bi- e tri-dimensionale?

5 Proprietà generali delle equazioni lineari del second'ordine

1. Dopo aver brevemente discusso il concetto di moto browniano, illustrare i significati probabilistici che sono stati discussi nel corso per l'equazione del calore e l'equazione di Laplace.

2. Discutere, per un'equazione lineare, del second'ordine, a coefficienti variabili (in un numero qualsiasi di variabili), la nozione di equazione *di tipo ellittico, parabolico o iperbolico*, facendo anche esempi. Spiegare alcune proprietà degli operatori di Laplace, del calore, delle onde, che valgono, sotto opportune ipotesi, rispettivamente per gli operatori ellittici, parabolici, iperbolici.

6 Spazi di Sobolev

Nota sulle prossime domande: *quando si chiede di definire uno spazio di Sobolev (questo è vero per ogni spazio di funzioni!), è necessario non solo definirlo come* insieme *(cioè dicendo quali funzioni vi appartengono) ma anche definire il prodotto scalare e/o la norma che ne inducono la* struttura *di spazio prehilbertiano o di spazio vettoriale normato.*

1. Dare la definizione di derivata debole di una funzione, in una o più variabili, e confrontare questa nozione con quella di derivata distribuzionale. Dare la definizione di spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$. Enunciare poi il teorema di caratterizzazione dello spazio $H^1(a,b)$ (in una dimensione). Fare quindi esempi di funzioni discontinue che appartengono o non appartengono a spazi $H^1(\Omega)$, in dimensione opportuna.

2. Dare la definizione di derivata debole (anche di ordine successivo al primo) e definire gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e $H^k(\Omega)$ per Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, con la loro struttura di spazi di Banach e di Hilbert, rispettivamente. Quindi, dimostrare che $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

3. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti tra una funzione $H^1(\Omega)$ e una $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Poincaré e la sua conseguenza riguardo alla norma nello spazio $H_0^1(\Omega)$.

4. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$, definire lo spazio $H_0^1(\Omega)$. Quindi enunciare e dimostrare il teorema di caratterizzazione distribuzionale del duale $H^{-1}(\Omega)$ di $H_0^1(\Omega)$ e fare esempi di elementi di $H^{-1}(\Omega)$ che non sono funzioni.

5. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$ e dello spazio $H_0^1(\Omega)$, enunciare con precisione i vari risultati visti nel corso che riguardano l'approssimazione di funzioni $H^1(\Omega)$ con funzioni regolari.

6. Dopo aver richiamato la definizione dello spazio $H^1(\Omega)$ e dello spazio $H_0^1(\Omega)$, discutere il concetto di *traccia* di una funzione $H^1(\Omega)$ e enunciare con precisione i risultati visti nel corso a questo riguardo. Quindi, enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti per due funzioni $H^1(\Omega)$.

7 Spazi di Hilbert

1. Dopo aver richiamato la definizione di spazio prehilbertiano (con gli assiomi di prodotto scalare) e spazio di Hilbert, dare la definizione di *forma bilineare* su uno *spazio prehilbertiano*, e definire i concetti di forma bilineare *simmetrica*, *continua*, *coerciva*, *non negativa*. Fare poi esempi e contresempi di forme bilineari (su uno spazio prehilbertiano o di Hilbert) che sono o non sono simmetriche, continue, coercive, non negative.

2. Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per *problema variazionale astratto*. Quindi, nel caso particolare di una forma bilineare *simmetrica*, dimostrare, sotto ulteriori opportune ipotesi, il teorema di buona posizione del problema.

3. Dopo aver richiamato la definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert, dire cosa si intende per *problema variazionale astratto*. Quindi enunciare e dimostrare il teorema che mette in relazione la soluzione di un problema variazionale astratto con un problema di minimizzazione di un opportuno funzionale.

8 Formulazione debole di problemi ai limiti per equazioni ellittiche

1. Dare la formulazione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + c(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega,$$

(con $a(x)$ scalare) ricavandola dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari.

a. Dimostrare che sotto opportune ipotesi una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

b. Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert.

c. La soluzione del problema risolve anche un problema di minimo di funzionale? Spiegare.

2. Dare la formulazione debole del problema di Neumann con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) + c(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega,$$

(con $a(x)$ scalare) ricavandola dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari.

a. Dimostrare che sotto opportune ipotesi una soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

b. Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert.

c. La soluzione del problema risolve anche un problema di minimo di funzionale? Spiegare.

3. Dare la formulazione debole del problema di Dirichlet con dato al bordo nullo per l'equazione ellittica

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)\,u_{x_i}\right)_{x_j}+\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\,u_{x_k}+c(x)\,u=f(x)\ \text{ in }\Omega,$$

(con $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ matrice simmetrica), ricavandola dalla definizione di soluzione classica nell'ipotesi che tutti gli ingredienti del problema siano regolari.

Enunciare poi delle ipotesi precise (sul dominio e le funzioni coinvolte) sotto le quali il problema (in senso debole) è ben posto, dimostrando la buona posizione in base alla teoria nota degli spazi di Hilbert.

4. Dopo aver dato la definizione di soluzione debole del problema di Dirichlet *con dato al bordo nullo* per l'equazione ellittica

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)\,u_{x_i}\right)_{x_j}+\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\,u_{x_k}+c(x)\,u=f(x)\ \text{ in }\Omega,$$

con $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ matrice simmetrica (senza bisogno di ricavarla a partire dalla definizione classica) e aver enunciato (senza dimostrarlo) un risultato preciso di buona posizione del problema in senso debole, mostrare come si modifica il procedimento nel caso in cui il dato al bordo non è zero, enunciando e dimostrando un risultato di buona posizione in questo caso. E' sufficiente considerare il caso in cui il dato al bordo g è in realtà una funzione definita su tutto Ω.

9 Tipi di esercizi

1. Problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio.
2. Problema di Neumann per il laplaciano sul cerchio.
3. Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore (omogenea) sul segmento.
4. Problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore (omogenea) sul segmento.
5. Problema di Cauchy per l'equazione lineare del trasporto (e reazione, anche non omogenea) sulla retta.
6. Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione della corda vibrante fissata agli estremi.
7. Problema di Cauchy per l'equazione (omogenea o non omogenea) della corda vibrante illimitata.