Riferimenti per lo studio del corso di
Metodi Analitici per le EDP
Ing. Matematica, a.a. 2023/2024. Politecnico di Milano
Settimana 2
Prof. M. Bramanti

Si veda anche il programma dettagliato disponibile alla pagina web del corso (aggiornato a questa settimana).

Equazione di Laplace:
Dal libro di testo:
Cap.3, §3.3.4, 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 7.2.2; 3.3.2, 3.3.3.
Per la dimostrazione del fatto che $-\Delta\Gamma = \delta$, e il corollario relativo alla risolubilità dell'equazione di Poisson, si rimanda alle "lavagne delle lezioni": a lezione si è presentata una dimostrazione leggermente diversa (e più semplice) da quella presentata sul libro.

Files pdf da scaricare dalla pagina webeep del corso:
Esercitazioni_EDP.pdf
Dalla cartella di materiali "seconda settimana":
Toolbox "Richiami su trasformata di Fourier e complementi sull'integrale di Lebesgue"
Toolbox "Richiami su coordinate sferiche e integrali di funzioni radiali in $\mathbb{R}^n$"
Toolbox "Richiami sulle distribuzioni"
File su "L'equazione di Laplace sul semipiano"
"Lavagne delle lezioni" (2 files pdf)

Esercizi.
-*Laplaciano sul semipiano*
Si consideri il problema di Dirichlet per il laplaciano nel semipiano

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) = \chi_{(-1,1)}(x) \end{cases}$$

A lezione si è mostrato il grafico della soluzione, che è:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{1-x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{1+x}{y}\right)\right].$$

Si chiede di calcolare il limite di $u(x,y)$ per x fissato e $y \to 0^+$, verificando che nei punti in cui il dato al bordo è continua la u assume con continuità il dato al bordo. Cosa succede nei punti di discontinuità del dato al bordo?

-*Equazione di Poisson in* $\mathbb{R}^n$

A lezione è stato affermato che per risolvere l'equazione

$$\Delta u = f(x) \text{ in } \mathbb{R}^n,$$

la trasformata di Fourier non è un buon metodo. Provate ad applicarla e capire qual è il problema per cui non riusciamo a ottenere una formula risolutiva del tipo

$$u = k * f$$

per un opportuno nucleo integrale k definito in $\mathbb{R}^n$.

-*Funzione di Green e nucleo di Poisson per il semispazio.*

-Partendo dall'espressione della funzione di Green per il semispazio,

$$G(x,y) = \frac{1}{\omega_n (n-2)} \left\{ \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{|x^* - y|^{n-2}} \right\} \text{ (per } n \geq 3\text{)}$$

dove, per $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, definiamo $x^* = (x', -x_n)$, calcolare esplicitamente il nucleo di Poisson eseguendo la derivata:

$$P(x,\sigma) = \left(\partial_{y_n} G(x,y)\right)_{/y=(\sigma,0)}$$

e verificare che si ottiene l'espressione

$$P(x,\sigma) = \frac{2x_n}{\omega_n \left(|x'-\sigma|^2 + x_n^2\right)^{n/2}}.$$

-Per $n = 2$ la funzione di Green (per il semipiano) ha l'espressione

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \log\left[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right] - \log\left[(x_1-y_1)^2 + (x_2+y_2)^2\right] \right\}.$$

Calcolare il nucleo di Poisson, verificando che si trova

$$P(x,\sigma) = \frac{1}{\pi} \frac{x_2}{(x_1-\sigma)^2 + x_2^2},$$

come già calcolato col metodo della trasformata di Fourier.

-*Proprietà del valor medio.* A lezione abbiamo dimostrato, in dimensione n qualsiasi, la proprietà del valor medio per le funzioni armoniche. Per $n = 2$ questa proprietà di può ritrovare anche come conseguenza della formula risolutiva mediante serie di funzioni che abbiamo discusso a lezione per il cerchio. Verificare questa affermazione.