Riferimenti per lo studio del corso di
Metodi Analitici per le EDP
Ing. Matematica, a.a. 2023/2024. Politecnico di Milano
Settimana 3
Prof. M. Bramanti

Si veda anche il programma dettagliato disponibile alla pagina web del corso (aggiornato a questa settimana).

Equazione di Laplace:
Dal libro di testo:
Cap.3, §3.3.2, 3.3.3, 3.3.4.

Equazione di diffusione:
Cap.2, §2.1, 2.2, 2.3, 2.8.

Files pdf da scaricare dalla pagina webeep del corso, cartella "settimana 3":
File su "L'equazione del calore sul segmento"
File su "L'equazione del calore nello spazio"
"Lavagne delle lezioni" (2 files pdf)
Esercitazioni_EDP_3.pdf

Esercizi
Dal file "Esercitazioni EDP" svolgere i seguenti esercizi sull'equazione del calore sul segmento: 26, 27.

Esercizio (dal tema d'esame di luglio 2022**).** Risolvere il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sulla sbarra finita:

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0 \text{ per } x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x, 0) = e^{3x} \text{ per } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

In quale senso è assunta la condizione iniziale? Calcolare il valore della temperatura limite per tempi lunghi.

Esercizio (dal tema d'esame di gennaio 2023**).** Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sulla sbarra finita, dopo aver previsto in base alla teoria in che senso sarà assunto il dato iniziale:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 \text{ per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), t > 0 \\ u(0, t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x, 0) = x \cos x \end{cases}$$

Esercizio. Si consideri il seguente problema per l'equazione del calore sulla retta:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \text{ per } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ricordando che la soluzione del problema, ottenuta formalmente col metodo della trasformata di Fourier, è assegnata dalla formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} f(y)\, dy,$$

commentare cosa si può dire della "candidata soluzione" $u(x,t)$ assegnata dalla formula precedente nel caso di ciascuna delle seguenti condizioni iniziali:

$$f_1(x) = e^{-|x|};\, f_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2};\, f_3(x) = e^{x^2-|x|};\, f_4(x) = e^{|x|^3},$$

giustificando opportunamente le proprie affermazioni in base ai risultati visti a lezione. Si chiede in particolare di discutere per quali tempi t la soluzione è definita, e cosa si può dire sul suo comportamento per tempi lunghi.

Approfondimenti. Chi vuole mettersi alla prova, affronti i prossimi esercizi teorici:

Esercizio 1 *A lezione abbiamo accennato al fatto che l'equazione del calore "col segno cambiato", cioè*

$$u_t + D\Delta u = 0$$

si può vedere come equazione del calore retrograda*, cioè considerando il tempo che scorre all'indietro (o analogamente, come se il calore passasse dal corpo più caldo al corpo più freddo). Per quest'operatore, il problema di Cauchy non è ben posto. In particolare, la soluzione non dipende con continuità dalla condizione iniziale. Lo si verifichi sul seguente esempio numerico.*

La soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t + u_{xx} = 0 \text{ in } (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \frac{\sin nx}{n} \end{cases} \quad \text{è data da: } u(x,t) = \frac{e^{n^2 t} \sin(nx)}{n}.$$

Verificare che per ogni $T > 0$ fissato e per $n \to \infty$ si ha:

$$\sup_{x\in(0,\pi)} |u(x,0)| = \frac{1}{n} \to 0 \text{ mentre } \sup_{x\in(0,\pi),t\in(0,T)} |u(x,t)| = \frac{e^{n^2 T}}{n} \to +\infty.$$

Questo significa che in corrispondenza di una condizione iniziale "piccola quanto vogliamo" si può avere una soluzione "arbitrariamente grande". Per quest'operatore, quindi, la soluzione non è controllabile dalla condizione iniziale.

Esercizio 2 *A partire dalla formula risolutiva utilizzata per risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet sul segmento:*

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \text{ per } x \in [0,L], t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0,L] \end{cases}$$

e utilizzando il metodo di Duhamel*, in modo analogo a quanto visto per l'equazione del calore non omogenea in tutto lo spazio, ottenere una formula risolutiva per il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione non omogenea:*

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = F(x,t) \text{ per } x \in [0,L], t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ per } t > 0 \\ u(x,0) = 0 \text{ per } x \in [0,L]. \end{cases}$$

[Questo problema è riportato nel file "Equazione del calore sul segmento": cercare di risolverlo senza leggerlo da lì, e poi confrontare quanto ottenuto].

Esercizio 3 *Svolgere l'esercizio 30 di approfondimento dal file "Esercitazioni EDP"*