Riferimenti per lo studio del corso di
Metodi Analitici per le EDP
Ing. Matematica, a.a. 2023/2024. Politecnico di Milano
Settimana 4
Prof. M. Bramanti

Si veda anche:
il programma dettagliato disponibile alla pagina web del corso (aggiornato a questa settimana);
il file “Domande-tipo di teoria sulla parte di programma svolta fin qui”, scaricabile dalla pagina web del corso (aggiornato al 15/3/2024).

Nucleo del calore e distribuzioni:
Si veda il file 04_calore_spazio.pdf su webeep, cartella Settimana 3

Equazione lineare del trasporto:
Cap.4, §4.1, 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.4.2 (ma a lezione abbiamo trattato solo il caso lineare).

Equazione della corda vibrante:
Cap.5, §5.2.1, 5.2.2, 5.3.1, 5.3.2, 5.4.1.

Files pdf da scaricare dalla pagina webeep del corso, cartella Settimana 4:
“Lavagne delle lezioni” (2 files pdf).
File Esercitazioni_EDP_4

Esercizi
Svolgere dal file pdf “Esercitazioni” gli esercizi 36-42 sull’equazione lineare del trasporto.

Approfondimenti. Chi vuole mettersi alla prova, affronti i prossimi esercizi teorici:

Esercizio 1 *Si consideri il problema di Cauchy per l’equazione di diffusione, trasporto e reazione (unidimensionale), omogeneo:*

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} + vu_x + \gamma u = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare che questo si può risolvere con il metodo del cambio di variabile*, analogo a quanto visto per l’equazione di trasporto e reazione, cioè:*
1) si pone

$$u(x,t) = a^{ax+bt} w(x,t),$$

con a, b da determinarsi, si calcolano le derivate di u e si sostituiscono nell’equazione in u.

2) si scelgono valori opportuni di a, b per i quali risulta che u soddisfa l'equazione coi termini di ordine inferiore se e solo se w soddisfa l'equazione di sola diffusione (cioè: si determinano a, b che annullano i coefficienti di w e w_x). Si deve trovare:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{\frac{v}{2D}x} e^{-\left(\frac{v^2}{4D}+\gamma\right)t} w(x,t) \text{ con} \\ w_t - Dw_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

3) Si esprime w in funzione della condizione iniziale e si risale alla formula di rappresentazione per u.

Esercizio 2 *L'equazione lineare del trasporto con termine di reazione e di sorgente si può risolvere anche utilizzando la trasformata di Fourier. Provare a farlo.*

Suggerimento: per antitrasformare, servirà anche la seguente proprietà della trasformata di Fourier (formula della traslazione, di verifica immediata):

$$\mathcal{F}(f(x+a))(\xi) = \widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i a \xi}.$$

Esercizio 3 *Si vuole dimostrare che, sotto opportune ipotesi, la soluzione del problema di Cauchy globale per l'equazione del calore in $\mathbb{R}^3$*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

(cioè in dimensione spaziale 3 e quando il termine noto non dipende dal tempo; notare che abbiamo scelto $D = 1$) tende, per $t \to +\infty$, alla soluzione del problema stazionario

$$-\Delta u = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^3.$$

Seguire i seguenti passi:

1. Si scrive la formula di rappresentazione per la soluzione del problema di Cauchy e per $t \to +\infty$ si trova che

$$u(x,t) \to \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x-y,s) f(y)\, dy ds = \int_{\mathbb{R}^3} K(x-y) f(y)\, dy$$

con

$$K(x) = \int_0^{+\infty} \Gamma(x,s)\, ds.$$

2. Si dimostra che

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{3/2}} ds = \frac{1}{4\pi |x|}$$

[Suggerimento: fare la sostituzione $\frac{|x|^2}{4t} = u^2$].

3. Riflettere su quanto ottenuto, alla luce di quello che sappiamo sulla soluzione fondamentale del laplaciano in $\mathbb{R}^3$.

4. Che ostruzione si trova provando a ripetere questa procedura in dimensione spaziale 2?