

Riferimenti per lo studio del corso di
Metodi Analitici per le EDP
Ing. Matematica, a.a. 2022/2023. Politecnico di Milano
Settimana 5
Prof. M. Bramanti

Si veda anche:

il programma dettagliato disponibile alla pagina web del corso (aggiornato a questa settimana);

il file “Domande-tipo di teoria sulla parte di programma svolta fin qui”, scaricabile dalla pagina web del corso (aggiornato a questa settimana).

Equazione non omogenea sulla retta: metodo di Duhamel Cap.5, §5.4.4.

Equazione della corda vibrante, soluzioni deboli:

Cap.5, §5.4.2 (in parte).

Equazione delle onde in dimensione $n \geq 2$:

Cap.5, § 5.7, 5.8.1, 5.8.2, 5.8.3.

Si veda il file pdf scaricabile da webeep “05_onde_Cauchy_globale”.

Il metodo di separazione delle variabili per risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet su un dominio limitato di \mathbb{R}^n , la discussione delle proprietà generali di autovalori e autofunzioni del laplaciano, e la particolarizzazione al caso del rettangolo, si trovano discusse ad es. sul testo

M. Bramanti, Esercitazioni di Analisi 3, ed. CUSL, Cap.22.

Alcune relazioni tra equazioni alle derivate parziali e probabilità. Significati probabilistici di alcune equazioni alle derivate parziali:

v. file powerpoint “Significati probabilistici” e file pdf di quella lezione, su WeBeep.

Files da scaricare dalla pagina WeBeep del corso:

“Lavagne delle lezioni” (2 files pdf).

File pdf “Esercitazioni_05”

File pdf “05_onde_Cauchy_globale”

File powerpoint con le slides mostrate a lezione su “sintesi sui metodi di risoluzione esplicita”.

File powerpoint con le slides mostrate a lezione su “significati probabilistici di alcune EDP”.

File pdf con lezione su “significati probabilistici di alcune EDP”.

Esercizi. Si possono svolgere, a questo punto, tutti gli esercizi del file “Esercitazioni_05” oltre agli esercizi assegnati nei temi d’esame degli scorsi due anni accademici, che potete scaricare (con svolgimento) dalla pagina web del corso.

Approfondimenti.

Il file pdf con la lezione su “*significati probabilistici di alcune EDP*” nelle sezioni 1, 2, 3 contiene ciò che è stato spiegato a lezione ed è in programma d’esame. La sezione 4 dello stesso file ha contenuti che non sono stati spiegati a lezione e non sono in programma d’esame; chi è curioso di sapere qualcosa di più sulle relazioni tra analisi delle EDP e probabilità, è invitato a leggere anche la sezione 4.

Chi vuole mettersi alla prova, affronti i prossimi esercizi teorici:

Esercizio 1 *A lezione si è detto che la formula di D’Alembert per la soluzione del problema di Cauchy sulla retta*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

assegna, quando $g \in C^0(\mathbb{R})$ e $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, una soluzione in senso debole. Dimostrare quest’affermazione, almeno nel caso $h = 0$.

Esercizio 2 *Utilizzando il metodo di Duhamel (nella versione che abbiamo utilizzato per l’equazione della corda vibrante, adatta cioè a equazioni del second’ordine nel tempo), scrivere una candidata formula di rappresentazione per la soluzione del problema*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t) & \text{per } x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

a partire dalla formula di Kirchhoff.

Fare poi lo stesso per l’analogo problema in dimensione spaziale 2, a partire dalla formula di Poisson.

Esercizio 3 *A lezione è stato mostrato il metodo della discesa di Hadamard, con cui a partire dalla formula di Kirchhoff per la soluzione del problema di Cauchy globale per l’equazione delle onde in \mathbb{R}^3 si può ricavare la formula di Poisson per la soluzione del problema di Cauchy globale per l’equazione delle onde in \mathbb{R}^2 . Imitando quel procedimento, a partire dalla formula di Poisson ricavare la formula analoga in \mathbb{R} (ottenendo nuovamente la formula di D’Alembert che conosciamo già). Ovviamente questo non è utile dal punto di vista del risultato che si trova (già noto, e ottenibile molto più semplicemente), è solo un esercizio per mettere alla prova la comprensione del metodo della discesa.*