Riferimenti per lo studio del corso di
Metodi Analitici per le EDP
Ing. Matematica, a.a. 2024/2025. Politecnico di Milano
Settimana 4
Prof. M. Bramanti

Si veda anche il programma dettagliato disponibile alla pagina web del corso (aggiornato a questa settimana).

Equazione di diffusione:
Cap.4, par. 4.3.3, 4.3.5, 4.3.6.

Equazione lineare del trasporto:
Cap.5.

Equazione della corda vibrante:
Cap.6. par. 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3 (per ora in parte).

Esercizio sull'equazione di diffusione in tutto lo spazio. Svolgere l'esercizio 4.40.

Esercizi sull'equazione lineare del trasporto. Svolgere gli esercizi del blocco 5.14-5.25 che non sono stati già svolti a lezione.

Svolgere l'esercizio teorico 5.27, a complemento di quanto visto nel Teorema 5.6.

Approfondimenti facoltativi

Equazione di diffusione, trasporto e reazione. Se l'equazione di diffusione unidimensionale su tutta la retta viene completata con i termini di trasporto e reazione, si ottiene un'equazione che è ancora risolubile col metodo della trasformata di Fourier: svolgere a questo proposito l'esercizio guidato 4.49. Dopo aver stabilito la formula risolutiva che si ottiene in generale, applicarla svolgendo l'esercizio 4.41.

Lo stesso metodo si potrebbe applicare all'equazione di trasporto e reazione (senza termine di diffusione). Sembra un caso particolare del precedente, ma se si rifanno da capo i calcoli con la trasformata di Fourier, si osserva che nei passaggi cambia qualcosa. Si svolga a questo proposito l'esercizio guidato 5.26.

Soluzione dell'equazione di Poisson come limite per tempi lunghi dell'equazione di diffusione su tutto lo spazio, e relazione tra le corrispondenti soluzioni fondamentali. Svolgere l'esercizio teorico 4.48.

Ipotesi più generali sul dato di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta. Per il problema di Cauchy per l'equazione del calore omogenea sulla retta

$$\begin{cases} Hu = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

abbiamo stabilito la formula risolutiva:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} g(y)\, dy$$

sotto l'ipotesi $g \in L^1(\mathbb{R})$ oppure $g \in C_0^*(\mathbb{R})$. E' evidente, d'altro canto, che date le proprietà di decrescenza rapida del nucleo del calore, l'integrale che assegna u può aver senso sotto ipotesi molto più deboli sul dato iniziale g. Quanto più deboli? E con quali risultati? Chi è interessato a questo argomento, può leggere il paragrafo 4.3.4. Dopo aver letto questo paragrafo, provate a fare l'Esercizio 4.39.