

**Riferimenti per lo studio del corso di  
Metodi Analitici per le EDP**  
Ing. Matematica, a.a. 2024/2025. Politecnico di Milano  
**Settimana 5**  
Prof. M. Bramanti

Si veda anche il programma dettagliato disponibile alla pagina web del corso (aggiornato a questa settimana).

*Equazione della corda vibrante:*  
Cap.6. par. 6.1.3, 6.1.4, 6.1.5.

*Modelli che portano all'equazione delle onde per  $n = 2$  o  $3$ :*  
Cap. 6, par. 6.2 (a lezione abbiamo fatto dei cenni; le deduzioni dell'equazione della membrana vibrante e delle equazioni delle onde elettromagnetiche non sono state fatte a lezione e non sono in programma, ma possono essere una lettura interessante).

*Equazione delle onde su un dominio limitato:*  
Cap. 6, 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3.

A lezione si è dato un breve cenno sulla *membrana vibrante rettangolare*; questo argomento non è in programma, ma leggere il par. 6.3.4 può essere interessante, a titolo di confronto con quanto abbiamo studiato sulla *corda* vibrante fissata agli estremi; così come, per i più volenterosi, può essere interessante leggere il par. 6.3.5 sulla membrana vibrante *circolare*, per farsi un'idea concreta di cosa significa che, nello studio del problema agli autovalori per il laplaciano, ogni geometria particolare porta a studiare un sistema opportuno di “funzioni speciali”.

*Il problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde:*  
Cap. 6, par. 6.4.1, 6.4.2, 6.4.3.

*Equazioni alle derivate parziali e probabilità:*  
Cap. 8, par. 8.1.1, 8.1.2.

La lettura del par. 8.2 (non in programma, mentre vedremo il par. 8.1.3) può essere un approfondimento interessante per chi vuole avere una prima idea del mondo delle *equazioni differenziali stocastiche*, e del suo nesso con quello delle EDP.

**Esercizi sull'equazione della corda vibrante.** Svolgere gli esercizi del blocco 6.28-6.46 che non sono stati già svolti a lezione.

Svolgere l'esercizio teorico 6.54, a complemento di quanto visto nel Teorema 6.9 e Osservazione 6.10.

### **Approfondimenti facoltativi**

-Per la corda vibrante limitata, abbiamo studiato solo il problema di Cauchy-Dirichlet: estremi fissati. Può essere interessante vedere cosa cambia affrontando con la stessa tecnica il problema di Cauchy-Neumann (condizioni nulle agli estremi). A parte la (prevedibile) comparsa delle funzioni  $\cos(n\pi x/L)$  al posto di  $\sin(n\pi x/L)$ , si osserva un fenomeno particolare, che è descritto nell'Esercizio 6.51.

-Per la corda vibrante illimitata, abbiamo visto il concetto di soluzione debole, con risultati analoghi a quelli già incontrati per l'equazione del trasporto. A lezione il teorema di esistenza di soluzioni deboli è stato enunciato senza dimostrazione, chi vuole mettersi alla prova svolga l'esercizio 6.52 (correggendo  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$  con  $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ).

-Abbiamo visto il *metodo della discesa di Hadamard*, con cui si ottiene la formula risolutiva per il problema di Cauchy globale in  $\mathbb{R}^2$  a partire da quella analoga in  $\mathbb{R}^3$  (formula di Kirchhoff). Chi vuole mettere alla prova la propria comprensione di quel metodo, può svolgere l'esercizio 6.56.