

**Riferimenti per lo studio del corso di
Metodi Analitici per le EDP**
Ing. Matematica, a.a. 2025/2026. Politecnico di Milano
Settimana 2
Prof. M. Bramanti

Si veda anche il programma dettagliato disponibile alla pagina web del corso (aggiornato a questa settimana).

Equazione di Laplace:

Sull'equazione di Laplace / Poisson: Cap.3, par. 3.3.1 (per la formula integrale di Poisson), par. 3.4, par. 3.5 (tranne i Teoremi 3.32 e 3.33), par. 3.6.1, 3.6.2 (per ora fino alla dimostrazione del teor. 3.35 esclusa).

Richiami e strumenti:

Richiami sulla continuità e derivabilità degli integrali dipendenti da un parametro: Cap. 2, par. 2.7;

Richiami sulla trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$: Cap. 2, par. 2.6;

Richiami sulle approssimazione dell'identità: Cap. 2, par. 2.8;

Richiami sulle coordinate sferiche in \mathbb{R}^n , integrale di funzioni radiali: Cap. 2, par. 2.2.

Richiami sulle distribuzioni: Cap. 2, par. 2.5.

Esercizi:

Svolgere, se già non lo si è fatto, tutti gli esercizi sul problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio (3.52-3.56).

Svolgere gli esercizi sul problema di Neumann per l'equazione di Laplace sul cerchio: 2.58, 3.59, 3.61, 3.62.

Svolgere, come già detto a lezione, l'Esercizio 3.63 sul problema di Dirichlet sul semipiano.

Esercizi teorici sulle proprietà delle funzioni armoniche

1. Nel caso del Laplaciano sul cerchio, verificare direttamente la validità del principio di massimo, in base alla formula integrale di Poisson. [Suggerimento. Occorre sapere che l'integrale del nucleo di Poisson rispetto a θ fa 1. Perché questo è vero? Rispondere senza cercare di calcolare l'integrale, ma ragionando sul modo in cui abbiamo dedotto la formula integrale di Poisson].

2. Verificare che vale un principio di massimo anche nel caso del semipiano (anche se in questo caso non segue dal teorema che abbiamo dimostrato). Scrivere un enunciato preciso. Per quali dati e quali soluzioni vale questo principio di massimo?

Approfondimenti facoltativi.

Provare a svolgere gli Esercizi 3.65, 3.66, 3.67.

Chi è interessato, legga la dimostrazione del Teorema 3.28 pp.116-7 (non in programma), che è stato enunciato a lezione.

Chi è interessato a un'ulteriore applicazione interessante della proprietà di media e la regolarità delle funzioni armoniche, legga il Teorema di Liouville e la relativa dimostrazione, pp.120-1 (non in programma).