Riferimenti per lo studio del corso di
Metodi Analitici per le EDP
Ing. Matematica, a.a. 2025/2026. Politecnico di Milano
Settimana 3
Prof. M. Bramanti

Si veda anche il programma dettagliato disponibile alla pagina web del corso (aggiornato a questa settimana).

Scaricare dalla pagina web del sito il file "Domande di comprensione e verifica sullo studio dell"argomento: l'equazione di Laplace / Poisson" e utilizzarlo per verificare e consolidare la comprensione di quella parte di programma.

Equazione di Laplace-Poisson:

Cap.3, par. 3.6.2, 3.7.1 (tranne prop. 3.4.4), 3.7.2 (cenni sul semispazio e sulla costruzione per la sfera; Teorema 3.45, senza dimostrazione).

Equazione di diffusione:

Cap.2, par. 4.1, 4.2, 4.3.2.

Per i richiami sulla tecnica di *sviluppo di Fourier in serie di soli seni o soli coseni*, si veda il Par. 2.4.2.

Esercizi. Svolgere i seguenti esercizi sui problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann sul segmento:

4.31, 4.34-4.38, e terminare i calcoli dell'esercizio 4.33, impostato a lezione.

Approfondimenti facoltativi

1. Chi vuole mettersi alla prova riguardo alla *comprensione delle tecniche di separazione delle variabili* incontrate fin qui nel corso, provi a svolgere gli Esercizi 4.43 e 4.44.

2. *Soluzione fondamentale del laplaciano nel piano.* A lezione abbiamo dimostrato che la soluzione fondamentale Γ del Laplaciano soddisfa l'equazione distribuzionale $\Delta\Gamma = -\delta$. La dimostrazione è stata fatta per $n = 3$. Provare a ripetere la dimostrazione per $n = 2$, cioè

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2\pi}\log|x|,$$

osservando quali piccole modifiche vanno apportate alla dimostrazione.

3. *L'equazione retrograda del calore.* A lezione si è dimostrato un risultato di dipendenza continua per il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su cilindri limitati. Si è anche detto che l'equazione

$$u_t + D\Delta u = 0$$

(col segno $+$ invece che $-$ davanti al laplaciano, detta *equazione del calore retrograda*) descrive l'evoluzione della temperatura facendo scorrere il tempo all'indietro, o equivalentemente descrive l'evoluzione della temperatura in un ipotetico mondo in cui il calore fluisca dalle regioni più fredde a quelle più calde. Per questo operatore, la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet *non dipende con continuità dal dato.* Chi vuole capire di più questo fatto, può leggere il paragrafetto a p. 176, dedicato a questo argomento.