

**Corso di Metodi Analitici per le EDP**  
Ing. Matematica, a.a. 2025/2026. Politecnico di Milano  
**Domande di comprensione e verifica sullo studio dell'argomento:**  
**l'Equazione di Diffusione**  
Prof. M. Bramanti

**Nota:** queste domande non sono “domande tipo da esame”, che saranno fornite a suo tempo. Sono pensate invece come occasione di autoverifica della comprensione di quanto visto a lezione su questo argomento. Si raccomanda di rispondere alle domande nell'ordine in cui sono scritte, in particolare rispondere a ciascuna domanda prima di leggere le domande successive.

1. Per indicare l'equazione del calore abbiamo usato anche l'espressione “equazione di diffusione”. In che senso questa seconda espressione è più generale? Quali altri fenomeni può descrivere l'equazione? Con quale significato della funzione incognita?

2. Per l'equazione del calore, scrivi alcuni problemi (ai limiti e/o ai valori iniziali) che si possono studiare. Per ciascuno di questi, definisci lo spazio di funzioni in cui è naturale cercare le soluzioni (rispondi ragionando sulle proprietà della soluzione che il problema richiede, e non cercando di ricordare quanto è stato detto). Per ciascuno dei problemi che hai scritto, nello spazio di funzioni che hai indicato come classe delle soluzioni, nel corso abbiamo enunciato un risultato di unicità? Precisa eventuali ipotesi ulteriori che servono.

3. Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sul segmento,

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{per } x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{per } x \in (0, L) \end{cases}$$

e sia  $u$  la soluzione che abbiamo ottenuto. Rispondi *Vero* o *Falso* a ciascuna delle seguenti:

- a. Se  $f \in L^1(0, L)$  allora  $u \in C^\infty((0, L) \times (0, +\infty))$ .
- b. Se  $f \in L^1(0, L)$  allora per ogni  $\delta > 0$  è  $u \in C^\infty((0, L) \times (\delta, +\infty))$ , ma potrebbe non essere  $u \in C^\infty((0, L) \times (0, +\infty))$ .
- c. Se  $f \in L^1(0, L)$  allora la serie che assegna  $u$  converge totalmente in  $(0, L) \times (0, +\infty)$ .
- d. Se  $f \in L^1(0, L)$  allora per ogni  $\delta > 0$  la serie che assegna  $u$  converge totalmente in  $(0, L) \times (\delta, +\infty)$ , ma potrebbe non convergere totalmente in  $(0, L) \times (0, +\infty)$ .
- e. Se  $f \in C^0([0, L])$  allora la serie che assegna  $u$  converge totalmente in  $[0, L] \times [0, +\infty)$ .
- f. Se  $f \in L^1(0, L)$  allora la soluzione del problema tende a zero per  $t \rightarrow +\infty$ .

4. Consideriamo il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore sul segmento,

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{per } x \in (0, L), t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{per } x \in (0, L). \end{cases}$$

Rispondi *Vero* o *Falso* a ciascuna delle seguenti:

- a. Se  $u$  è soluzione del problema, allora anche  $u(x, t) + \text{costante}$  lo è.
- b. Affinché una soluzione del problema possa esistere, è necessario che il dato iniziale  $f$  soddisfi una opportuna condizione di compatibilità.
- c. Se  $f \in L^1(0, L)$  allora la soluzione del problema tende a zero per  $t \rightarrow +\infty$ .
- d. Se  $f \in L^2(0, L)$  allora la soluzione del problema tende a  $f$  in  $L^2(0, L)$  per  $t \rightarrow 0^+$ .

5. Nello studio dell'equazione del calore in tutto  $\mathbb{R}^n$  abbiamo incontrato il *nucleo del calore*

$$K(x, t) = \frac{e^{-|x|^2/(4Dt)}}{(4\pi Dt)^{n/2}} \text{ per } t > 0.$$

Rispondi *Vero* o *Falso* a ciascuna delle seguenti:

- a. Il nucleo del calore permette di scrivere una formula di rappresentazione per la soluzione del problema di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$  per l'equazione del calore omogenea  $Hu = 0$ .
- b. Il nucleo del calore permette di scrivere una formula di rappresentazione per la soluzione del problema di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$  per l'equazione del calore non omogenea  $Hu = f$ .
- c. Il nucleo del calore a lezione è stato calcolato in due modi diversi: usando la trasformata di Fourier o il metodo di Duhamel.
- d. La soluzione del problema di Cauchy per  $Hu = 0$  con dato iniziale  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  è infinitamente derivabile per  $t > 0$  perché il nucleo del calore  $K(x, t)$  ha derivate globalmente limitate nel semispazio  $t > 0$ .
- e. Per il nucleo del calore  $K(x, t)$  si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x, t) dx = 1 \text{ per ogni } t > 0.$$

f. Per il nucleo del calore  $K(x, t)$  si ha:

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, t) dx dt = 1.$$

g. Il nucleo del calore si può vedere come una famiglia di approssimazioni dell'identità in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

h. Il nucleo del calore si può vedere come una famiglia di approssimazioni dell'identità in  $\mathbb{R}^n$  rispetto al parametro  $\varepsilon = \sqrt{t}$ .

i. Dal punto di vista distribuzionale, il nucleo del calore si può vedere come soluzione di

$$HK(\cdot, t) = \delta_0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ per ogni } t > 0.$$

l. Dal punto di vista distribuzionale, il nucleo del calore (prolungato a zero per  $t < 0$ ) si può vedere come soluzione di

$$HK(\cdot, \cdot) = \delta_{(0,0)} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}).$$

6. Sapresti scrivere una funzione  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  (per qualche  $n \geq 1$ ) che non sia anche  $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  e risolva un problema di Cauchy

$$\begin{cases} Hu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

per qualche  $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  e  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ? Stessa domanda per  $f \equiv 0$ .

7. Rispondi *Vero* o *Falso* a ciascuna delle seguenti.

a. Il *principio di sovrapposizione* serve per saper calcolare la soluzione del problema

$$\begin{cases} Hu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

una volta che si conosce la soluzione del problema

$$\begin{cases} Hu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

b. Il *principio di sovrapposizione* serve per saper calcolare la soluzione del problema

$$\begin{cases} Hu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

una volta che si conosce la soluzione dei problemi

$$\begin{cases} Hu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Hu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

c. Il *metodo di Duhamel* serve per saper calcolare la soluzione del problema

$$\begin{cases} Hu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

una volta che si conosce la soluzione del problema

$$\begin{cases} Hu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}.$$