Corso di Metodi Analitici per le EDP
Ing. Matematica, a.a. 2025/2026. Politecnico di Milano
Domande di comprensione e verifica sullo studio dell'argomento: l'Equazione di Laplace / Poisson
Prof. M. Bramanti

Nota: *queste domande non sono "domande tipo da esame", che saranno fornite a suo tempo. Sono pensate invece come occasione di autoverifica della comprensione di quanto visto a lezione su questo argomento.*

1. Per l'equazione di Poisson, ricorda qualche significato fisico che può avere l'equazione (precisando caso per caso cosa rappresenta la soluzione u dell'equazione).

2. Per l'equazione di Poisson, scrivi alcuni *problemi ai limiti* che si possono studiare. Per ciascuno di questi, definisci lo *spazio di funzioni in cui è naturale cercare le soluzioni* (rispondi ragionando sulle proprietà della soluzione che il problema richiede, e non cercando di *ricordare* quanto è stato detto). Il problema richiede anche, per avere senso, qualche regolarità del dominio su cui si studia? Per ciascuno dei problemi ai limiti che hai scritto, nello spazio di funzioni che hai indicato come classe delle soluzioni, nel corso abbiamo dimostrato un risultato di unicità? Abbiamo incontrato qualche problema ai limiti per cui *non c'è unicità* nella classe che hai specificato?

3. Consideriamo il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(0) \\ u = f & \text{su } \partial B_R(0) \end{cases}$$

e sia u la soluzione che abbiamo ottenuto. Rispondi *Vero* o *Falso* a ciascuna delle seguenti:

a. Se $f \in L^1(\partial B_R(0))$ allora $u \in C^\infty(B_R(0))$.

b. Se $f \in L^1(\partial B_R(0))$ allora per ogni $r < R$ è $u \in C^\infty(B_r(0))$, ma potrebbe non essere $u \in C^\infty(B_R(0))$.

c. Se $f \in L^1(\partial B_R(0))$ allora la serie che assegna u converge totalmente in $B_R(0)$.

d. Se $f \in L^1(\partial B_R(0))$ allora per ogni $r < R$ la serie che assegna u converge totalmente in $B_r(0)$, ma potrebbe non convergere totalmente in $B_R(0)$.

e. Se $f \in C^0(\partial B_R(0))$ allora la serie che assegna u converge totalmente in $B_R(0)$.

f. Se $f \in C^0(\partial B_R(0))$ allora si può dimostrare che la u è $C^0\left(\overline{B_R(0)}\right)$.

4. Nello studio del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul semipiano $S = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ abbiamo ottenuto la formula integrale di Poisson,

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} k(x - z, y) f(z)\, dz$$

(con f dato al bordo e k nucleo di Poisson). In questo contesto abbiamo stabilito che (rispondere *Vero* o *Falso* a ciascuna affermazione):

a. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, si possono calcolare le derivate di u portandole sotto l'integrale di Poisson, in tutto il semipiano $y > 0$.

b. Il nucleo di Poisson e le sue derivate sono limitate in tutto il semipiano $y > 0$.

c. Nella classe $C^2(S) \cap C^0(\overline{S})$ c'è unicità per il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.

5. Sia Ω un aperto limitato e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Se $\Delta u = 0$ in Ω, la u può assumere il massimo assoluto solo in Ω? E se $\Delta u = f$ in Ω (per qualche f continua)?

6. Sapresti scrivere una funzione $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ (per qualche $n \geq 2$) che non sia anche $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e risolva $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ per qualche $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$? Stessa domanda per $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n$.

7. La proprietà di media caratterizza le funzioni armoniche all'interno di quale classe di funzioni?

8. Diversi teoremi parlano di funzioni che soddisfano "la proprietà di media", ma in realtà abbiamo scritto *due diverse* proprietà di media. Commenta questo fatto.

9. (Rispondi *Vero* o *Falso* a ciascuna delle seguenti). La *soluzione fondamentale* del laplaciano in $\mathbb{R}^n$:

a. E' l'unica soluzione distribuzionale di $-\Delta\Gamma = \delta$.

b. E' l'unica soluzione radiale di $-\Delta\Gamma = \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

10. (Rispondi *Vero* o *Falso* a ciascuna delle seguenti). Abbiamo visto che l'equazione $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$, nella classe $C^2(\mathbb{R}^n)$:

a. Ha un'unica soluzione.

b. Ha almeno una soluzione se $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

c. Ha almeno una soluzione se $f \in C^2_0(\mathbb{R}^n)$.

11. (Rispondi *Vero* o *Falso* a ciascuna delle seguenti). A lezione abbiamo detto che se Ω è un dominio limitato lipschitziano, si può dimostrare che il seguente problema è ben posto.

a.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \text{con } g \in C^0(\partial\Omega).$$

b.

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \text{con } f \in C^0(\overline{\Omega}), g \in C^0(\partial\Omega).$$