Corso di Metodi Analitici per le EDP
Ing. Matematica, a.a. 2025/2026. Politecnico di Milano
Domande di comprensione e verifica sullo studio dell'argomento: l'equazione delle onde
Prof. M. Bramanti

Nota: *queste domande non sono "domande tipo da esame", che saranno fornite a suo tempo. Sono pensate invece come occasione di autoverifica della comprensione di quanto visto a lezione su questo argomento. Si raccomanda di rispondere alle domande nell'ordine in cui sono scritte, in particolare rispondere a ciascuna domanda prima di leggere le domande successive.*

1. Studiando l'*equazione della corda vibrante fissata agli estremi* abbiamo stabilito una formula di rappresentazione della candidata soluzione mediante una certa serie di funzioni; questo procedimento è analogo a quanto abbiamo fatto per il problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio e per l'equazione del calore su una sbarra finita, con temperatura nulla agli estremi. Tuttavia il risultato ottenuto è piuttosto diverso:

-Sia per il laplaciano sul cerchio che per il calore della sbarra abbiamo visto che, sotto ipotesi piuttosto deboli sul dato al bordo o dato iniziale, rispettivamente, la candidata soluzione è molto regolare e soddisfa l'equazione differenziale; i problemi di regolarità si pongono nel momento in cui si vuole provare che la soluzione assume con continuità il dato al bordo / la condizione iniziale.

-Per la corda vibrante, senza ipotesi forti di regolarità dei dati non si riesce neppure a garantire che la candidata soluzione possieda le derivate richieste dall'equazione differenziale.

Si spieghi l'origine *analitica* di questo diverso comportamento.

2. Confrontiamo le proprietà dell'equazione della corda vibrante fissata agli estremi con quelle della corda vibrante illimitata (equazione sulla retta).

a. Un risultato di unicità è stato stabilito, prima di risolvere l'equazione, per l'equazione della corda fissata agli estremi, mentre non è stato necessario fare questo per la corda illimitata. Perché nel primo caso era necessario e nel secondo no?

b. Le ipotesi sui dati iniziali sotto le quali abbiamo stabilito la risolubilità classica del problema studiato, per la corda illimitata sono ipotesi ottimali, mentre per la corda fissata agli estremi sono condizioni sufficienti, ma non è evidente che siano necessarie. Si spieghi il perché di questa differenza.

c. Dal punto di vista fisico, quali sono le differenze rilevanti che abbiamo incontrato tra le *vibrazioni libere* (cioè in assenza di forze esterne, cioè soluzioni dell'*equazione omogenea*) di una corda fissata agli estremi e quelle di una corda illimitata?

3. Confrontando quanto abbiamo scoperto nello studio delle equazioni di Laplace, del calore, del trasporto, delle onde, si spieghi con precisione cosa significa che *le prime due regolarizzano* mentre *le ultime due non regolarizzano.*

4. Nello studio del problema di Cauchy per l'equazione omogenea della corda vibrante (illimitata o fissata agli estremi), abbiamo formulato il problema chiedendo che l'equazione differenziale sia soddisfatta per $t > 0$ e le condizioni iniziali sono assegnate per $t = 0$. Cambia qualcosa nella soluzione del problema se richiediamo che l'equazione differenziale sia soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$?

5. Abbiamo impostato col metodo di separazione di variabili il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde su un dominio limitato, ottenendo che ogni soluzione a variabili separate rappresenta una vibrazione in cui ogni punto del dominio è soggetto a un moto armonico. Questo risultato non dipende dalla *forma* del dominio Ω.

a. Spiegare com'è possibile questo fatto, cioè da quali "ingredienti logici" dipende il fatto che la vibrazione di un punto sia una funzione sinusoidale del tempo.

b. Il fatto che ogni soluzione a variabili separate sia tempo periodica implica che lo sia anche la sovrapposizione di più (o di infinite) soluzione a variabili separate? Spiegare.

6. Spiegare cosa si intende per *dominio di dipendenza* di $\left(\overline{x}, \overline{t}\right)$ per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n$, confrontando i casi di dimensione $n = 1, 2, 3$.

7. Spiegare in cosa consiste il fenomeno della *perdita di regolarità* per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^3$.

8. Si confrontino le due formule incontrate nello studio dell'equazione delle onde in dimensione 1 e 3:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy$$
$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} h(y)\, dS(y).$$

Spiegare perché dalla *seconda* si legge che u è *tanto regolare quanto* h, mentre dalla *prima* si legge che *u ha un grado di regolarità in più* rispetto ad h.