Corso di Metodi Analitici per le EDP
Ing. Matematica, a.a. 2025/2026. Politecnico di Milano
Domande di comprensione e verifica sullo studio dell'argomento: l'Equazione lineare del trasporto
Prof. M. Bramanti

Nota: *queste domande non sono "domande tipo da esame", che saranno fornite a suo tempo. Sono pensate invece come occasione di autoverifica della comprensione di quanto visto a lezione su questo argomento. Si raccomanda di rispondere alle domande nell'ordine in cui sono scritte, in particolare rispondere a ciascuna domanda prima di leggere le domande successive.*

1. Studiando l'*equazione del calore* abbiamo detto che la funzione incognita $u(x,t)$ può rappresentare sia una temperatura che una concentrazione. Anche per l'*equazione lineare del trasporto* sono possibili queste due interpretazioni della funzione incognita, oppure una delle due non è naturale? Giustificare la risposta.

2. Per l'equazione lineare omogenea del trasporto, abbiamo studiato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e dimostrato che la soluzione esiste ed è unica sotto l'ipotesi $g \in C^1(\mathbb{R})$. In base a quanto visto nello studio dell'equazione di Laplace e del calore, ci si potrebbe aspettare, a priori, che l'ipotesi naturale su g fosse più debole, ossia $g \in C^0(\mathbb{R})$. C'è speranza di migliorare il risultato che abbiamo ottenuto, oppure per questa equazione è proprio necessario richiedere $g \in C^1(\mathbb{R})$? Spiegare, assicurandosi di aver capito bene la differenza tra questa equazione e le altre due citate, su questo aspetto.

3. Nell'equazione lineare del trasporto, con termine di reazione,

$$u_t + vu_x + \gamma u = 0,$$

il parametro v può avere qualunque segno? Qual è il significato fisico di questo segno? Stessa domanda per il parametro γ.

4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + vu_x = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}, \boxed{t > 0} \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

è lo stesso oppure no, rispetto a risolvere il problema

$$\begin{cases} u_t + vu_x = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}, \boxed{t \in \mathbb{R}} \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(dove cioè l'equazione si vuole sia soddisfatta anche per $t < 0$, e la soluzione $u(x,t)$ definita anche per $t < 0$)? Come mai? Spiegare.

5. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, \boxed{t > 0} \\ u(x,0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

è lo stesso oppure no, rispetto a risolvere il problema

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, \boxed{t \in \mathbb{R}} \\ u(x,0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(dove cioè l'equazione si vuole sia soddisfatta anche per $t < 0$, e la soluzione $u(x,t)$ definita anche per $t < 0$)? Come mai? Spiegare.

6. Nello studio del problema di Cauchy per l'equazione lineare non omogenea del trasporto

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

qual è l'ipotesi minima naturale da fare sul termine noto f? E qual è l'ipotesi su f sotto cui abbiamo dimostrato l'esistenza e unicità di soluzione del problema?

7. Abbiamo introdotto il concetto di *soluzione debole* del problema

$$\begin{cases} u_t + vu_x = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[In realtà l'abbiamo introdotto anche per l'equazione *non omogenea*, ma in questa domanda ci concentriamo sul caso omogeneo]. Vogliamo riflettere sulle *motivazioni* per cui è stato introdotto questo concetto. Rispondi *Vero* o *Falso* a ciascuna delle seguenti.

a. Anche se g è regolare, abbiamo visto che il problema di Cauchy a volte non ha soluzioni regolari, perciò si cercano almeno soluzioni deboli.

b. Supponiamo $g \in L^1(\mathbb{R})$. In questo caso, abbiamo visto che esiste una soluzione dell'equazione che è C^1 per tempi positivi, ma in generale non assume la condizione iniziale; il concetto di soluzione debole permette in questi casi di dare un senso alla condizione iniziale.

c. Stessa domanda precedente supponendo ora $g \in C^0(\mathbb{R})$.

d. La soluzione classica del problema esiste se e solo se $g \in C^0(\mathbb{R})$ e d'altro canto, per il significato fisico dell'equazione, interessa studiare il problema anche in casi in cui g non è $C^0(\mathbb{R})$.

e. La soluzione classica del problema esiste se e solo se $g \in C^1(\mathbb{R})$ e d'altro canto, per il significato fisico dell'equazione, interessa studiare il problema anche in casi in cui g non è $C^1(\mathbb{R})$.

8. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vogliamo riflettere sui concetti di *soluzione classica* e *soluzione debole* per quest'equazione. Rispondi *Vero* o *Falso* a ciascuna delle seguenti.

a. Ogni soluzione classica del problema è anche soluzione debole.

b. Ogni soluzione debole del problema è anche soluzione classica.

c. Abbiamo dimostrato che se f e g sono regolari allora i concetti di soluzione classica e soluzione debole coincidono.

d. Abbiamo dimostrato che se f, g e u sono regolari, allora se u è soluzione debole è anche soluzione classica.

e. Abbiamo dimostrato che la funzione $u(x,t)$ assegnata dalla formula che rappresenta la soluzione del problema quando f e g sono regolari, continua ad assegnare una soluzione debole del problema quando f e g sono meno regolari.

f. Abbiamo dimostrato l'unicità della soluzione classica del problema, in un'opportuna classe di funzioni.

g. Abbiamo dimostrato l'unicità della soluzione debole del problema, in un'opportuna classe di funzioni.