Introduzione alla teoria spettrale

Seminario per il corso di Metodi Analitici delle EDP - prof. Bramanti

Laura Abatangelo

Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano

13 aprile 2026

Overview

1. Richiami di conoscenze note

2. Primi elementi di teoria spettrale

3. Uno sguardo ai temi di ricerca

Overview

1. **Richiami di conoscenze note**
2. Primi elementi di teoria spettrale
3. Uno sguardo ai temi di ricerca

Cos'è un autovalore?

Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $T : V \to V$ una applicazione lineare.

$v \in V \setminus \{0\}$ è un **autovettore** associato all'**autovalore** $\lambda \in \mathbb{R}$ se

$$T(v) = \lambda v$$

Cos'è un autovalore?

Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $T : V \to V$ una applicazione lineare.

$v \in V \setminus \{0\}$ è un **autovettore** associato all'**autovalore** $\lambda \in \mathbb{R}$ se

$$T(v) = \lambda v$$

Consideriamo l'operatore

$$-\Delta = -(\partial_{x_1 x_1} + \ldots + \partial_{x_n x_n}) : X \to Y,$$

dove X e Y sono spazi di funzioni (su $\mathbb{R}$) opportuni.

$$\boxed{?} \; -\Delta u = \lambda u \text{ per qualche } u \neq 0 \text{ in } X \; \boxed{?}$$

Consideriamo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato (e regolare per fare ciò che ci serve)

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Consideriamo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato (e regolare per fare ciò che ci serve)

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Sia $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e moltiplichiamo l'equazione. Dalla formula di Green (formale)

$$\underbrace{\int_\Omega -\Delta u\, \varphi}_{\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, \varphi} \qquad = \lambda \int_\Omega u\, \varphi$$

Consideriamo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato (e regolare per fare ciò che ci serve)

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Sia $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e moltiplichiamo l'equazione. Dalla formula di Green (formale)

$$\underbrace{\int_\Omega -\Delta u\, \varphi}_{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi} = \lambda \int_\Omega u\, \varphi$$

Formulazione debole del problema agli autovalori

$$u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega u\, \varphi \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Ricordi dal corso di EDP

1. $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con norma

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2} \quad \text{equivalente a} \quad \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2\right)^{1/2}$$

con prodotto scalare associato $(u, v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.

Ricordi dal corso di EDP

1. $H^1_0(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con norma

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2} \quad \text{equivalente a} \quad \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2\right)^{1/2}$$

   con prodotto scalare associato $(u, v)_{H^1_0} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.

2. $H^1_0(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$: ovvio dalla definizione;

Ricordi dal corso di EDP

1. $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con norma

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2} \quad \text{equivalente a} \quad \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2\right)^{1/2}$$

   con prodotto scalare associato $(u, v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.

2. $H_0^1(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$: ovvio dalla definizione;

3. L'equivalenza delle norme discende dalla **disuguaglianza di Poincaré**:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\int_\Omega u^2 \leq (\mathrm{diam}(\Omega))^2 \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Ricordi dal corso di EDP

1. $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con norma

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2} \quad \text{equivalente a} \quad \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2\right)^{1/2}$$

   con prodotto scalare associato $(u, v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.

2. $H_0^1(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$: ovvio dalla definizione;

3. L'equivalenza delle norme discende dalla **disuguaglianza di Poincaré**:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\int_\Omega u^2 \leq (\mathrm{diam}(\Omega))^2 \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

4. $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$, quindi, per **densità**, posso chiedere per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Definizione

Diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un **autovalore di** $(-\Delta)$ **in** $H_0^1(\Omega)$ se esiste $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega u\, v \qquad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega).$$

Definizione

Diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un **autovalore di** $(-\Delta)$ **in** $H^1_0(\Omega)$ se esiste $u \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega u\, v \quad \text{per ogni } v \in H^1_0(\Omega).$$

- $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ forma bilineare continua e coerciva
  (in realtà è il prodotto interno, quindi anche **simmetrica e non negativa**!)

Definizione

Diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un **autovalore di** $(-\Delta)$ **in** $H_0^1(\Omega)$ se esiste $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega u\, v \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega).$$

- $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ forma bilineare continua e coerciva
  (in realtà è il prodotto interno, quindi anche **simmetrica e non negativa**!)
- $T_u(v) = \lambda \int_\Omega u\, v$ funzionale lineare continuo, cioè $T_u(v) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^*$

Definizione

Diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un **autovalore di** $(-\Delta)$ **in** $H^1_0(\Omega)$ se esiste $u \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega u\, v \quad \text{per ogni } v \in H^1_0(\Omega).$$

- $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ forma bilineare continua e coerciva
  (in realtà è il prodotto interno, quindi anche **simmetrica e non negativa**!)
- $T_u(v) = \lambda \int_\Omega u\, v$ funzionale lineare continuo, cioè $T_u(v) \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^*$

Problema Variazionale Astratto

$$a(u,v) = T(v) \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \min_{u \in H^1_0(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} a(u,u) - T(u) \right\}$$

Overview

Quoziente di Rayleigh

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \end{aligned}$$

Teorema

Quoziente di Rayleigh

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \qquad \left[\frac{Ax \cdot x}{|x|^2},\ A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n\right] \end{aligned}$$

Teorema

Se

$$\exists\ u \in H_0^1 \setminus \{0\} :\ \mathcal{R}(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \mathcal{R}(v) =: m,$$

Quoziente di Rayleigh

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \; \mathbb{R} \\ u \; &\longmapsto \; \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \qquad \left[\frac{Ax \cdot x}{|x|^2}, \; A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}), \; x \in \mathbb{R}^n \right] \end{aligned}$$

Teorema

Se

$$\exists \; u \in H_0^1 \setminus \{0\} : \; \mathcal{R}(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \mathcal{R}(v) =: m,$$

allora

$$m \text{ è autovalore di } (-\Delta) \text{ in } H_0^1(\Omega) \text{ e } u \text{ è una relativa autofunzione, i.e.}$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = m \int_\Omega u \, v \quad \forall \; v \in H_0^1(\Omega).$$

Dimostrazione

Sia $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ t.c. $\mathcal{R}(u) \leq \mathcal{R}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.

Dimostrazione

Sia $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ t.c. $\mathcal{R}(u) \leq \mathcal{R}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.

Scelgo v di una forma particolare:

$$v = u + th, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \text{ è una variazione!}$$

Dimostrazione

Sia $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ t.c. $\mathcal{R}(u) \leq \mathcal{R}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.

Scelgo v di una forma particolare:

$$v = u + th, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \text{ è una variazione!}$$

$$\mathcal{R}(u + th) = \frac{\int_\Omega |\nabla(u + th)|^2}{\int_\Omega (u + th)^2} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h + t^2 \int_\Omega |\nabla h|^2}{\int_\Omega u^2 + 2t \int_\Omega uh + t^2 \int_\Omega h^2} \geq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}.$$

Dimostrazione

Sia $u \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$ t.c. $\mathcal{R}(u) \leq \mathcal{R}(v) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$.

Scelgo v di una forma particolare:

$$v = u + th, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ h \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} : \text{ è una variazione!}$$

$$\mathcal{R}(u + th) = \frac{\int_\Omega |\nabla(u + th)|^2}{\int_\Omega (u + th)^2} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h + t^2 \int_\Omega |\nabla h|^2}{\int_\Omega u^2 + 2t \int_\Omega uh + t^2 \int_\Omega h^2} \geq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}.$$

Moltiplico e divido (sono quantità positive!)

$$\int_\Omega u^2 \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h + t^2 \int_\Omega |\nabla h|^2 \right) \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \left(\int_\Omega u^2 + 2t \int_\Omega uh + t^2 \int_\Omega h^2 \right)$$

Dimostrazione

Sia $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ t.c. $\mathcal{R}(u) \leq \mathcal{R}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.

Scelgo v di una forma particolare:

$$v = u + th, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \text{ è una variazione!}$$

$$\mathcal{R}(u+th) = \frac{\int_\Omega |\nabla(u+th)|^2}{\int_\Omega (u+th)^2} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h + t^2 \int_\Omega |\nabla h|^2}{\int_\Omega u^2 + 2t \int_\Omega uh + t^2 \int_\Omega h^2} \geq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}.$$

Moltiplico e divido (sono quantità positive!)

$$\int_\Omega u^2 \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h + t^2 \int_\Omega |\nabla h|^2 \right) \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \left(\int_\Omega u^2 + 2t \int_\Omega uh + t^2 \int_\Omega h^2 \right)$$

$$\int_\Omega u^2 \left(2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h + t \int_\Omega |\nabla h|^2 \right) \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \left(2 \int_\Omega uh + t \int_\Omega h^2 \right), \quad \forall t \neq 0,\ \forall h \neq 0.$$

$$\implies \quad 2\int_\Omega u^2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \geq 2\int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega uh$$

$$\implies \quad 2\int_\Omega u^2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \geq 2\int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega uh$$

$$\int_\Omega u^2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega uh \quad \implies \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \geq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \int_\Omega uh \quad \forall h \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}.$$

$$\Longrightarrow \quad 2\int_\Omega u^2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \geq 2\int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega uh$$

$$\int_\Omega u^2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega uh \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \geq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \int_\Omega uh \quad \forall h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Ora ripeto il ragionamento con $-h$ al posto di h e trovo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \int_\Omega uh.$$

$$\implies \quad 2\int_\Omega u^2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \geq 2\int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega uh$$

$$\int_\Omega u^2 \int_\Omega \nabla u{\cdot}\nabla h \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega uh \quad \implies \quad \int_\Omega \nabla u{\cdot}\nabla h \geq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \int_\Omega uh \quad \forall h \in H^1_0(\Omega)\backslash\{0\}.$$

Ora ripeto il ragionamento con $-h$ al posto di h e trovo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \int_\Omega uh.$$

Quindi in totale

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = m \int_\Omega uh \quad \forall h \in H^1_0(\Omega): \quad \text{soluzione debole di } \begin{cases} -\Delta u = mu & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

C.V.D.

Perché il min è assunto?

Conseguenza di un risultato generale di Analisi Funzionale sullo spettro degli operatori compatti autoaggiunti...

Teorema

Gli autovalori di $(-\Delta)$ in $H_0^1(\Omega)$ sono una successione

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_k \leq \dots \to +\infty$$

Le relative autofunzioni u_k normalizzate in $L^2(\Omega)$ sono un **sistema ortonormale completo (s.o.n.c.)** di $L^2(\Omega)$ (e quindi di $H_0^1(\Omega)$).

$$\int_\Omega u_i \, u_j = \delta_{ij}$$

Perché il min è assunto?

Conseguenza di un risultato generale di Analisi Funzionale sullo spettro degli operatori compatti autoaggiunti...

Teorema

Gli autovalori di $(-\Delta)$ in $H_0^1(\Omega)$ sono una successione

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_k \leq \dots \to +\infty$$

Le relative autofunzioni u_k normalizzate in $L^2(\Omega)$ sono un **sistema ortonormale completo (s.o.n.c.)** di $L^2(\Omega)$ (e quindi di $H_0^1(\Omega)$).

$$\frac{1}{\lambda_i} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla u_j = \int_\Omega u_i \, u_j = \delta_{ij}$$

Conseguenze: proprietà del primo autovalore

Conseguenze: proprietà del primo autovalore

Prima proprietà: $m = \lambda_1 > 0$

In realtà $m := \min_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \mathcal{R}(v) = \lambda_1$ è proprio il **primo** autovalore!!

Conseguenze: proprietà del primo autovalore

Prima proprietà: $m = \lambda_1 > 0$

In realtà $m := \min_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \mathcal{R}(v) = \lambda_1$ è proprio il **primo** autovalore!!

<u>Dimostrazione:</u>
Infatti, se fosse

$$m = \lambda_k > \lambda_1 \quad \text{per qualche } k > 1,$$

scegliendo $v = u_1$, avremmo

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_1 = \lambda_1 \int_\Omega u_1^2 \quad \Longrightarrow \quad m \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u_1|^2}{\int_\Omega u_1^2} = \lambda_1 < m \quad \text{assurdo!}$$

In particolare, vediamo

$$\lambda_1 > 0.$$

Seconda proprietà: u_1 ha segno costante

Se Ω **connesso**, ogni autofunzione relativa a λ_1 ha **segno costante** in Ω.

Dimostrazione: regolarità $+$ principio del massimo forte.

Seconda proprietà: u_1 ha segno costante

Se Ω **connesso**, ogni autofunzione relativa a λ_1 ha **segno costante** in Ω.

Dimostrazione: regolarità + principio del massimo forte.

$$u \text{ autof. rel. a } \lambda_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2} = \frac{\displaystyle\int_\Omega \big|\nabla |u|\big|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2} \quad \Longleftrightarrow \quad |u| \text{ autof. rel. a } \lambda_1$$

Seconda proprietà: u_1 ha segno costante

Se Ω **connesso**, ogni autofunzione relativa a λ_1 ha **segno costante** in Ω.

<u>Dimostrazione:</u> regolarità + principio del massimo forte.

$$u \text{ autof. rel. a } \lambda_1 \iff \lambda_1 = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2} = \frac{\displaystyle\int_\Omega \big|\nabla |u|\big|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2} \iff |u| \text{ autof. rel. a } \lambda_1$$

Si può dimostrare che le autofunzioni sono $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ (i.e. soluzioni **classiche**!)

Seconda proprietà: u_1 ha segno costante

Se Ω **connesso**, ogni autofunzione relativa a λ_1 ha **segno costante** in Ω.

Dimostrazione: regolarità + principio del massimo forte.

$$u \text{ autof. rel. a } \lambda_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2} = \frac{\displaystyle\int_\Omega \big|\nabla |u|\big|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2} \quad \Longleftrightarrow \quad |u| \text{ autof. rel. a } \lambda_1$$

Si può dimostrare che le autofunzioni sono $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ (i.e. soluzioni **classiche**!)
Allora $-\Delta|u| = \lambda_1 |u| \geq 0$ in Ω, inoltre ovviamente $|u| \geq 0$ in Ω.

Seconda proprietà: u_1 ha segno costante

Se Ω **connesso**, ogni autofunzione relativa a λ_1 ha **segno costante** in Ω.

Dimostrazione: regolarità + principio del massimo forte.

$$u \text{ autof. rel. a } \lambda_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2} = \frac{\displaystyle\int_\Omega \big|\nabla |u|\big|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2} \quad \Longleftrightarrow \quad |u| \text{ autof. rel. a } \lambda_1$$

Si può dimostrare che le autofunzioni sono $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ (i.e. soluzioni **classiche**!)

Allora $-\Delta|u| = \lambda_1 |u| \geq 0$ in Ω, inoltre ovviamente $|u| \geq 0$ in Ω.

Allora per il **principio del massimo forte** o $|u| \equiv 0$ in Ω oppure $|u| > 0$ in Ω.

Seconda proprietà: u_1 ha segno costante

Se Ω **connesso**, ogni autofunzione relativa a λ_1 ha **segno costante** in Ω.

Dimostrazione: regolarità + principio del massimo forte.

$$u \text{ autof. rel. a } \lambda_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2} = \frac{\displaystyle\int_\Omega \big|\nabla |u|\big|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2} \quad \Longleftrightarrow \quad |u| \text{ autof. rel. a } \lambda_1$$

Si può dimostrare che le autofunzioni sono $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ (i.e. soluzioni **classiche**!)

Allora $-\Delta|u| = \lambda_1 |u| \geq 0$ in Ω, inoltre ovviamente $|u| \geq 0$ in Ω.

Allora per il **principio del massimo forte** o $|u| \equiv 0$ in Ω oppure $|u| > 0$ in Ω.

Siccome $u \not\equiv 0$ per def., deve essere $|u| > 0$ in Ω.

C.V.D.

Terza proprietà: semplicità

Se Ω **connesso**, λ_1 è un autovalore **semplice**, cioè $\dim\ker(-\Delta - \lambda_1) = 1$.

Dimostrazione (per assurdo):

Siano $u,\ v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ autofunzioni **lin. indip.** relative a λ_1.

Terza proprietà: semplicità

Se Ω **connesso**, λ_1 è un autovalore **semplice**, cioè $\dim\ker(-\Delta - \lambda_1) = 1$.

Dimostrazione (per assurdo):

Siano $u,\ v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ autofunzioni **lin. indip.** relative a λ_1.

Definiamo

$$w = u - \frac{\int_\Omega u}{\int_\Omega v}\, v \quad \Rightarrow \quad -\Delta w = \lambda_1\, w \quad \text{con } \int_\Omega w = 0.$$

Terza proprietà: semplicità

Se Ω **connesso**, λ_1 è un autovalore **semplice**, cioè $\dim\ker(-\Delta - \lambda_1) = 1$.

Dimostrazione (per assurdo):

Siano $u,\ v \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$ autofunzioni **lin. indip.** relative a λ_1.

Definiamo

$$w = u - \frac{\int_\Omega u}{\int_\Omega v}\, v \quad \Rightarrow \quad -\Delta w = \lambda_1\, w \quad \text{con } \int_\Omega w = 0.$$

Allora per il teo precedente deve essere $w \equiv 0$, cioè u e v sono lin. dip., contraddizione!

La migliore costante di Poincaré

$$\int_\Omega u^2 \leq (\mathrm{diam}(\Omega))^2 \int_\Omega |\nabla u|^2$$

La migliore costante di Poincaré

$$\int_\Omega u^2 \leq (\mathrm{diam}(\Omega))^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \geq \frac{1}{(\mathrm{diam}(\Omega))^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$$

La migliore costante di Poincaré

$$\int_\Omega u^2 \leq (\mathrm{diam}(\Omega))^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \geq \frac{1}{(\mathrm{diam}(\Omega))^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$$

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} = \lambda_1$$

La migliore costante di Poincaré

$$\int_\Omega u^2 \leq (\mathrm{diam}(\Omega))^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \geq \frac{1}{(\mathrm{diam}(\Omega))^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$$

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} = \lambda_1$$

$$\int_\Omega u^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^2 : \quad \frac{1}{\lambda_1} \text{ è la } \textbf{migliore} \text{ costante di Poincaré!}$$

Quindi in generale $\frac{1}{\lambda_1} \leq (\mathrm{diam}(\Omega))^2 \ldots$

La frequenza fondamentale della membrana vibrante

Equazione della membrana vibrante (delle onde in dimensione 2) fissata al bordo:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(t, x, y) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0, +\infty) \\ u(0, x, y) = g(x, y) & \text{in } \Omega \\ u_t(0, x, y) = h(x, y) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Tramite separazione delle variabili, $u(t, x, y) = T(t)\, U(x, y)$, troviamo i **modi propri**

$$T_k(t) = A\cos(\lambda_k t) + B\sin(\lambda_k t), \qquad U_k \text{ autofunzione relativa a } \lambda_k$$

$$\boxed{u_k(t, x, y,) = \{A\cos(\lambda_k t) + B\sin(\lambda_k t)\}\, U_k(x, y)}$$

E gli altri autovalori??

E gli altri autovalori??

Teorema

Sia $W_{k-1} = \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$. Allora $\forall\ k \geq 2$ si ha

$$\lambda_k = \min_{u \in W_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \mathcal{R}(u)$$

E gli altri autovalori??

Teorema

Sia $W_{k-1} = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_{k-1}\}$. Allora $\forall\ k \geq 2$ si ha

$$\lambda_k = \min_{u \in W_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \mathcal{R}(u)$$

Dimostrazione:

In generale, se $v \in L^2(\Omega)$ (ricordiamo che $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ sono un **s.o.n.c.**!)

$$v = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\int_{\Omega} v\, u_j \right) u_j,$$

Se $v \in W_{k-1}^{\perp}$ allora

$$v = \sum_{j=k}^{+\infty} \left(\int_{\Omega} v\, u_j \right) u_j.$$

$$\text{Valuto } \int_\Omega |\nabla v|^2 = \sum_{i,j=k}^{+\infty} \left(\int_\Omega v\, u_i \right) \left(\int_\Omega v\, u_j \right) \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla u_j$$

$$= \sum_{j=k}^{+\infty} \lambda_j \left(\int_\Omega v\, u_j \right)^2 \;\geq\; \lambda_k \sum_{j=k}^{+\infty} \left(\int_\Omega v\, u_j \right)^2 = \lambda_k \int_\Omega v^2.$$

Quindi

$$\inf_{W_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(v) \geq \lambda_k.$$

Ma se prendo v nell'autospazio $E(\lambda_k)$ di λ_k trovo: $\int_\Omega |\nabla v|^2 = \lambda_k \|v\|^2$ C.V.D.

$$\text{Valuto } \int_\Omega |\nabla v|^2 = \sum_{i,j=k}^{+\infty} \left(\int_\Omega v\, u_i\right)\left(\int_\Omega v\, u_j\right)\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla u_j$$

$$= \sum_{j=k}^{+\infty} \lambda_j \left(\int_\Omega v\, u_j\right)^2 \geq \lambda_k \sum_{j=k}^{+\infty} \left(\int_\Omega v\, u_j\right)^2 = \lambda_k \int_\Omega v^2.$$

Quindi

$$\inf_{W_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(v) \geq \lambda_k.$$

Ma se prendo v nell'autospazio $E(\lambda_k)$ di λ_k trovo: $\int_\Omega |\nabla v|^2 = \lambda_k \|v\|^2$ C.V.D.

Non c'è $\max_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \mathcal{R}(v)$, a differenza di $\mathcal{R}(x) := \dfrac{Ax \cdot x}{|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$!!!

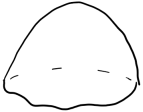
Overview

1. Richiami di conoscenze note

2. Primi elementi di teoria spettrale

3. **Uno sguardo ai temi di ricerca**

$$(-\Delta) \text{ su } H^1_0(\Omega) \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$



$$(-\Delta) \text{ su } H^1_{0,\Gamma}(\Omega) \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \setminus \Gamma \end{cases}$$

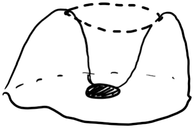
$H^1_0(\Omega) \subsetneq H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$: sono due operatori diversi!

In ogni caso

$$\lambda_k = \min_{u \in W^\perp_{k-1} \setminus \{0\}} \mathcal{R}(u) \quad \begin{cases} W^\perp_{k-1} \subseteq H^1_0(\Omega) & \rightsquigarrow \text{ il minimo è maggiore} \\ W^\perp_{k-1} \subseteq H^1_{0,\Gamma}(\Omega) & \rightsquigarrow \text{ il minimo è minore} \end{cases}$$

Oppure anche

$$(-\Delta) \text{ su } H^1_0(\Omega \setminus \overline{\omega}) \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \setminus \overline{\omega} \\ u = 0 & \text{su } \partial(\Omega \setminus \overline{\omega}) \end{cases}$$



Allora

$$H^1_0(\Omega \setminus \overline{\omega}) \subsetneq H^1_0(\Omega) \quad \rightsquigarrow \text{ gli autovalori salgono}$$

Se la perturbazione è piccola, è ragionevole aspettarsi che gli autovalori cambino **poco**. . .

In quali situazioni possiamo aspettarlo?

Riusciamo a **quantificare** questa variazione (Taylor al **primo ordine**)?

In quali situazioni possiamo aspettarlo?

Riusciamo a **quantificare** questa variazione (Taylor al **primo ordine**)?

Supponiamo di avere due operatori lineari sullo stesso spazio di Hilbert $T_1, T_2 : \ H \to H$.

In questo caso $\mathcal{R}_i(u) := \dfrac{(T_i u, u)_H}{\|u\|^2}$, $i = 1, 2$. Supponiamo $\lambda_k(T_1) \geq \lambda_k(T_2)$. Allora

$$\begin{aligned}
\lambda_k(T_1) - \lambda_k(T_2) &= \min_{u \in W_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \mathcal{R}_1(u) - \min_{u \in W_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \mathcal{R}_2(u) = \min_{u \in W_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \mathcal{R}_1(u) - \mathcal{R}_2(\overline{u}) \\
&\leq \mathcal{R}_1(\overline{u}) - \mathcal{R}_2(\overline{u}) = \frac{(T_1 \overline{u}, \overline{u})_H}{\|\overline{u}\|^2} - \frac{(T_2 \overline{u}, \overline{u})_H}{\|\overline{u}\|^2} = \frac{((T_1 - T_2)\overline{u}, \overline{u})_H}{\|\overline{u}\|^2} \\
&\leq \frac{\|(T_1 - T_2)\overline{u}\| \, \|\overline{u}\|}{\|\overline{u}\|^2} \leq \|T_1 - T_2\|
\end{aligned}$$

Un esempio in $\mathbb{R}^2$

Consideriamo $T_2 = T_1 + \varepsilon\, T_0$ con ε piccolo.

$$T_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad T_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$