

# Risolubilità del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace: il metodo di Perron

Stefano Biagi

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

April, 13, 2026

## Contenuto del seminario

- 1 Introduzione
  - ▶ Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace
  - ▶ L'idea di Perron
- 2 Il metodo di Perron
  - ▶ Funzioni subarmoniche e loro proprietà
  - ▶ Il Teorema di Perron
- 3 Il problema dei dati al bordo
  - ▶ L'esempio di Zaremba;
  - ▶ Barriere e condizioni geometriche di risolubilità
- 4 Oltre l'operatore di Laplace

## Contenuto del seminario

- 1 **Introduzione**
  - ▶ Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace
  - ▶ L'idea di Perron
- 2 Il metodo di Perron
  - ▶ Funzioni subarmoniche e loro proprietà
  - ▶ Il Teorema di Perron
- 3 Il problema dei dati al bordo
  - ▶ L'esempio di Zaremba;
  - ▶ Barriere e condizioni geometriche di risolubilità
- 4 Oltre l'operatore di Laplace

## Contenuto del seminario

- 1 **Introduzione**
  - ▶ Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace
  - ▶ L'idea di Perron
- 2 Il metodo di Perron
  - ▶ Funzioni subarmoniche e loro proprietà
  - ▶ Il Teorema di Perron
- 3 Il problema dei dati al bordo
  - ▶ L'esempio di Zaremba;
  - ▶ Barriere e condizioni geometriche di risolubilità
- 4 Oltre l'operatore di Laplace

## Contenuto del seminario

- 1 **Introduzione**
  - ▶ Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace
  - ▶ L'idea di Perron
- 2 **Il metodo di Perron**
  - ▶ Funzioni subarmoniche e loro proprietà
  - ▶ Il Teorema di Perron
- 3 **Il problema dei dati al bordo**
  - ▶ L'esempio di Zaremba;
  - ▶ Barriere e condizioni geometriche di risolubilità
- 4 **Oltre l'operatore di Laplace**

## Contenuto del seminario

- 1 **Introduzione**
  - ▶ Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace
  - ▶ L'idea di Perron
- 2 **Il metodo di Perron**
  - ▶ Funzioni subarmoniche e loro proprietà
  - ▶ Il Teorema di Perron
- 3 **Il problema dei dati al bordo**
  - ▶ L'esempio di Zaremba;
  - ▶ Barriere e condizioni geometriche di risolubilità
- 4 **Oltre l'operatore di Laplace**

## Contenuto del seminario

- 1 **Introduzione**
  - ▶ Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace
  - ▶ L'idea di Perron
- 2 **Il metodo di Perron**
  - ▶ Funzioni subarmoniche e loro proprietà
  - ▶ Il Teorema di Perron
- 3 **Il problema dei dati al bordo**
  - ▶ L'esempio di Zaremba;
  - ▶ Barriere e condizioni geometriche di risolubilità
- 4 **Oltre l'operatore di Laplace**

## Contenuto del seminario

- ① **Introduzione**
  - ▶ Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace
  - ▶ L'idea di Perron
  
- ② **Il metodo di Perron**
  - ▶ Funzioni subarmoniche e loro proprietà
  - ▶ Il Teorema di Perron
  
- ③ **Il problema dei dati al bordo**
  - ▶ L'esempio di Zaremba;
  - ▶ Barriere e condizioni geometriche di risolubilità
  
- ④ **Oltre l'operatore di Laplace**

## Contenuto del seminario

- ① Introduzione
  - ▶ Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace
  - ▶ L'idea di Perron
- ② Il metodo di Perron
  - ▶ Funzioni subarmoniche e loro proprietà
  - ▶ Il Teorema di Perron
- ③ Il problema dei dati al bordo
  - ▶ L'esempio di Zaremba;
  - ▶ Barriere e condizioni geometriche di risolubilità
- ④ Oltre l'operatore di Laplace

## Contenuto del seminario

### Referenza principale

Per una trattazione più approfondita dell'argomento (e per le dimostrazioni non presentate durante questo seminario) si veda la monografia

- S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey *Harmonic function theory*, Springer-Verlag New York Inc. 2001.

# Introduzione

## Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto limitato**, e sia  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Il **problema di Dirichlet** (per l'equazione di Laplace in  $\Omega$ , con dato  $\varphi$ ), indicato con  $(D)_{\Omega, \varphi}$ , consiste nel trovare una funzione

$$u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

(detta **soluzione del problema**) tale che

- ①  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ ;
- ②  $\Delta u(x) = 0$  per ogni  $x \in \Omega$  (cioè  $u$  è **armonica in  $\Omega$** );
- ③  $u(\xi) = \varphi(\xi)$  per ogni  $\xi \in \partial\Omega$  (cioè  $u$  **realizza il dato al bordo  $\varphi$** ).



## Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto limitato**, e sia  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Il **problema di Dirichlet** (per l'equazione di Laplace in  $\Omega$ , con dato  $\varphi$ ), indicato con  $(D)_{\Omega, \varphi}$ , consiste nel trovare una funzione

$$u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

(detta **soluzione del problema**) tale che

- 1  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ ;
- 2  $\Delta u(x) = 0$  per ogni  $x \in \Omega$  (cioè  $u$  è **armonica in  $\Omega$** );
- 3  $u(\xi) = \varphi(\xi)$  per ogni  $\xi \in \partial\Omega$  (cioè  $u$  **realizza il dato al bordo  $\varphi$** ).

## Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto limitato**, e sia  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Il **problema di Dirichlet** (per l'equazione di Laplace in  $\Omega$ , con dato  $\varphi$ ), indicato con  $(D)_{\Omega, \varphi}$ , consiste nel trovare una funzione

$$u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

(detta **soluzione del problema**) tale che

- 1  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ ;
- 2  $\Delta u(x) = 0$  per ogni  $x \in \Omega$  (cioè  $u$  è **armonica in  $\Omega$** );
- 3  $u(\xi) = \varphi(\xi)$  per ogni  $\xi \in \partial\Omega$  (cioè  $u$  **realizza il dato al bordo  $\varphi$** ).

## Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto limitato**, e sia  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Il **problema di Dirichlet** (per l'equazione di Laplace in  $\Omega$ , con dato  $\varphi$ ), indicato con  $(D)_{\Omega, \varphi}$ , consiste nel trovare una funzione

$$u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

(detta **soluzione del problema**) tale che

- 1  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ ;
- 2  $\Delta u(x) = 0$  per ogni  $x \in \Omega$  (cioè  $u$  è **armonica in  $\Omega$** );
- 3  $u(\xi) = \varphi(\xi)$  per ogni  $\xi \in \partial\Omega$  (cioè  $u$  **realizza il dato al bordo  $\varphi$** ).

## Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Grazie al **principio del massimo debole (PMD)**, sappiamo che  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **ha al più una soluzione** (se una soluzione esiste, allora è unica); la questione della esistenza, invece, è molto più delicata e, in generale, tutt'altro che ovvia.

### Il caso eccezionale delle palle

Nel caso particolare in cui  $\Omega = B_r(x_0)$  (per opportuni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ ), si può dimostrare che il problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$  ha **un'unica soluzione per ogni  $\varphi \in C(\partial\Omega)$** .

Inoltre, tale soluzione ammette la seguente "espressione esplicita":

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in \partial\Omega \\ \frac{1}{\omega_n r} \int_{\partial B_r(x_0)} \varphi(y) \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n} d\sigma(y) & \text{se } x \in \Omega \end{cases}$$

(dove  $\omega_n$  è la superficie della sfera di centro 0 e raggio 1).

**Attenzione!** Il precedente risultato è **veramente eccezionale**, e dipende fortemente dalla "geometria" delle palle (oltre che dal legame tra funzioni armoniche nel piano e funzioni olomorfe); dunque, è insperabile estenderlo al caso di un aperto (limitato)  $\Omega$  qualsiasi.

## Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Grazie al **principio del massimo debole (PMD)**, sappiamo che  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **ha al più una soluzione** (se una soluzione esiste, allora è unica); la questione della **esistenza**, invece, è molto più delicata e, in generale, tutt'altro che ovvia.

### Il caso eccezionale delle palle

Nel caso particolare in cui  $\Omega = B_r(x_0)$  (per opportuni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ ), si può dimostrare che il problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$  ha **un'unica soluzione per ogni  $\varphi \in C(\partial\Omega)$** . Inoltre, tale soluzione ammette la seguente "espressione esplicita":

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in \partial\Omega \\ \frac{1}{\omega_n r} \int_{\partial B_r(x_0)} \varphi(y) \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n} d\sigma(y) & \text{se } x \in \Omega \end{cases}$$

(dove  $\omega_n$  è la superficie della sfera di centro 0 e raggio 1).

**Attenzione!** Il precedente risultato è **veramente eccezionale**, e dipende fortemente dalla "geometria" delle palle (oltre che dal legame tra funzioni armoniche nel piano e funzioni olomorfe); dunque, è insperabile estenderlo al caso di un aperto (limitato)  $\Omega$  qualsiasi.

## Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Grazie al **principio del massimo debole (PMD)**, sappiamo che  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **ha al più una soluzione** (se una soluzione esiste, allora è unica); la questione della **esistenza**, invece, è molto più delicata e, in generale, tutt'altro che ovvia.

### Il caso eccezionale delle palle

Nel caso particolare in cui  $\Omega = B_r(x_0)$  (per opportuni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ ), si può dimostrare che il problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **ha un'unica soluzione per ogni  $\varphi \in C(\partial\Omega)$** .

Inoltre, tale soluzione ammette la seguente "espressione esplicita":

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in \partial\Omega \\ \frac{1}{\omega_n r} \int_{\partial B_r(x_0)} \varphi(y) \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n} d\sigma(y) & \text{se } x \in \Omega \end{cases}$$

(dove  $\omega_n$  è la superficie della sfera di centro 0 e raggio 1).

**Attenzione!** Il precedente risultato è **veramente eccezionale**, e dipende fortemente dalla "geometria" delle palle (oltre che dal legame tra funzioni armoniche nel piano e funzioni olomorfe); dunque, è insperabile estenderlo al caso di un aperto (limitato)  $\Omega$  qualsiasi.

## Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Grazie al **principio del massimo debole (PMD)**, sappiamo che  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **ha al più una soluzione** (se una soluzione esiste, allora è unica); la questione della **esistenza**, invece, è molto più delicata e, in generale, tutt'altro che ovvia.

### Il caso eccezionale delle palle

Nel caso particolare in cui  $\Omega = B_r(x_0)$  (per opportuni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ ), si può dimostrare che il problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **ha un'unica soluzione per ogni  $\varphi \in C(\partial\Omega)$** . Inoltre, tale soluzione ammette la seguente "espressione esplicita":

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in \partial\Omega \\ \frac{1}{\omega_n r} \int_{\partial B_r(x_0)} \varphi(y) \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n} d\sigma(y) & \text{se } x \in \Omega \end{cases}$$

(dove  $\omega_n$  è la superficie della sfera di centro 0 e raggio 1).

**Attenzione!** Il precedente risultato è **veramente eccezionale**, e dipende fortemente dalla "geometria" delle palle (oltre che dal legame tra funzioni armoniche nel piano e funzioni olomorfe); dunque, è insperabile estenderlo al caso di un aperto (limitato)  $\Omega$  qualsiasi.

## Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Grazie al **principio del massimo debole (PMD)**, sappiamo che  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **ha al più una soluzione** (se una soluzione esiste, allora è unica); la questione della **esistenza**, invece, è molto più delicata e, in generale, tutt'altro che ovvia.

### Il caso eccezionale delle palle

Nel caso particolare in cui  $\Omega = B_r(x_0)$  (per opportuni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ ), si può dimostrare che il problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **ha un'unica soluzione per ogni  $\varphi \in C(\partial\Omega)$** . Inoltre, tale soluzione ammette la seguente "espressione esplicita":

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in \partial\Omega \\ \frac{1}{\omega_n r} \int_{\partial B_r(x_0)} \varphi(y) \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n} d\sigma(y) & \text{se } x \in \Omega \end{cases}$$

(dove  $\omega_n$  è la superficie della sfera di centro 0 e raggio 1).

**Attenzione!** Il precedente risultato è **veramente eccezionale**, e dipende fortemente dalla "geometria" delle palle (oltre che dal legame tra funzioni armoniche nel piano e funzioni olomorfe); dunque, è insperabile estenderlo al caso di un aperto (limitato)  $\Omega$  qualsiasi.

## Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Grazie al **principio del massimo debole (PMD)**, sappiamo che  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **ha al più una soluzione** (se una soluzione esiste, allora è unica); la questione della **esistenza**, invece, è molto più delicata e, in generale, tutt'altro che ovvia.

### Il caso eccezionale delle palle

Nel caso particolare in cui  $\Omega = B_r(x_0)$  (per opportuni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ ), si può dimostrare che il problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **ha un'unica soluzione per ogni  $\varphi \in C(\partial\Omega)$** . Inoltre, tale soluzione ammette la seguente "espressione esplicita":

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in \partial\Omega \\ \frac{1}{\omega_n r} \int_{\partial B_r(x_0)} \varphi(y) \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n} d\sigma(y) & \text{se } x \in \Omega \end{cases}$$

(dove  $\omega_n$  è la superficie della sfera di centro 0 e raggio 1).

**Attenzione!** Il precedente risultato è **veramente eccezionale**, e dipende fortemente dalla "geometria" delle palle (oltre che dal legame tra funzioni armoniche nel piano e funzioni olomorfe); dunque, è insperabile estenderlo al caso di un aperto (limitato)  $\Omega$  qualsiasi.

## L'idea di Perron

Tuttavia, nel 1915, Oskar Perron osserva un fatto all'apparenza banale, che si rivelerà cruciale nello studio del problema di Dirichlet: se una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$  esiste, allora può essere caratterizzata in modo "esplicito".

### Teorema (di Perron, ver. 1)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Supponiamo esista una soluzione  $u$  del problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$ . Allora, per ogni  $x \in \bar{\Omega}$  si ha

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\}, \text{ dove} \\ \mathcal{S}_\varphi = \{v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) : \Delta v \geq 0 \text{ in } \Omega \text{ e } v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega\}.$$

*Dimostrazione.* Anzitutto, poiché  $u \in \mathcal{S}_\varphi$  (essendo una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ), si ha

$$\sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\} \geq u(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

## L'idea di Perron

Tuttavia, nel 1915, Oskar Perron osserva un fatto all'apparenza banale, che si rivelerà cruciale nello studio del problema di Dirichlet: se una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$  esiste, allora può essere caratterizzata in modo "esplicito".

### Teorema (di Perron, ver. 1)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Supponiamo esista una soluzione  $u$  del problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$ . Allora, per ogni  $x \in \bar{\Omega}$  si ha

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\}, \text{ dove}$$
$$\mathcal{S}_\varphi = \{v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) : \Delta v \geq 0 \text{ in } \Omega \text{ e } v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega\}.$$

*Dimostrazione.* Anzitutto, poiché  $u \in \mathcal{S}_\varphi$  (essendo una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ), si ha

$$\sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\} \geq u(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

## L'idea di Perron

Tuttavia, nel 1915, Oskar Perron osserva un fatto all'apparenza banale, che si rivelerà cruciale nello studio del problema di Dirichlet: se una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$  esiste, allora può essere caratterizzata in modo "esplicito".

### Teorema (di Perron, ver. 1)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . **Supponiamo** esista una soluzione  $u$  del problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$ . Allora, per ogni  $x \in \bar{\Omega}$  si ha

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\}, \text{ dove} \\ \mathcal{S}_\varphi = \{v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) : \Delta v \geq 0 \text{ in } \Omega \text{ e } v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega\}.$$

*Dimostrazione.* Anzitutto, poiché  $u \in \mathcal{S}_\varphi$  (essendo una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ), si ha

$$\sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\} \geq u(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

## L'idea di Perron

Tuttavia, nel 1915, Oskar Perron osserva un fatto all'apparenza banale, che si rivelerà cruciale nello studio del problema di Dirichlet: se una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$  esiste, allora può essere caratterizzata in modo "esplicito".

### Teorema (di Perron, ver. 1)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . **Supponiamo** esista una soluzione  $u$  del problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$ . Allora, per ogni  $x \in \bar{\Omega}$  si ha

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\}, \text{ dove} \\ \mathcal{S}_\varphi = \{v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) : \Delta v \geq 0 \text{ in } \Omega \text{ e } v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega\}.$$

*Dimostrazione.* Anzitutto, poiché  $u \in \mathcal{S}_\varphi$  (essendo una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ), si ha

$$\sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\} \geq u(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

## L'idea di Perron

Tuttavia, nel 1915, Oskar Perron osserva un fatto all'apparenza banale, che si rivelerà cruciale nello studio del problema di Dirichlet: se una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$  esiste, allora può essere caratterizzata in modo "esplicito".

### Teorema (di Perron, ver. 1)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . **Supponiamo** esista una soluzione  $u$  del problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$ . Allora, per ogni  $x \in \bar{\Omega}$  si ha

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\}, \text{ dove} \\ \mathcal{S}_\varphi = \{v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) : \Delta v \geq 0 \text{ in } \Omega \text{ e } v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega\}.$$

*Dimostrazione.* Anzitutto, poiché  $u \in \mathcal{S}_\varphi$  (essendo una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ), si ha

$$\sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\} \geq u(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

## L'idea di Perron

Tuttavia, nel 1915, Oskar Perron osserva un fatto all'apparenza banale, che si rivelerà cruciale nello studio del problema di Dirichlet: se una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$  esiste, allora può essere caratterizzata in modo "esplicito".

### Teorema (di Perron, ver. 1)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . **Supponiamo** esista una soluzione  $u$  del problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$ . Allora, per ogni  $x \in \bar{\Omega}$  si ha

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\}, \text{ dove} \\ \mathcal{S}_\varphi = \{v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) : \Delta v \geq 0 \text{ in } \Omega \text{ e } v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega\}.$$

*Dimostrazione.* Anzitutto, poiché  $u \in \mathcal{S}_\varphi$  (essendo una soluzione di  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ), si ha

$$\sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\} \geq u(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

## L'idea di Perron

*Dimostrazione - cont.* Per mostrare la disuguaglianza opposta (e dunque completare la dimostrazione del teorema), fissiamo una **qualsiasi**  $v \in \mathcal{S}_\varphi$  e mostriamo che

$$u(x) \geq v(x) \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

A tale scopo, distinguiamo due casi.

(I)  $x \in \partial\Omega$ . In questo caso, per definizione si ha

$$u(x) = \varphi(x) \geq v(x).$$

(II)  $x \in \Omega$ . In questo caso, ancora per definizione (e poiché  $u$  risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ) si ha

i)  $\Delta(v - u) = \Delta v - \Delta u = \Delta v \geq 0$  in  $\Omega$ ;

ii)  $v - u \leq \varphi - u = 0$  in  $\partial\Omega$ ;

da qui, usando il (PMD), concludiamo che  $v \leq u$  in  $\Omega$ , e dunque

$$u(x) \geq v(x).$$

## L'idea di Perron

*Dimostrazione - cont.* Per mostrare la disuguaglianza opposta (e dunque completare la dimostrazione del teorema), fissiamo una **qualsiasi**  $v \in \mathcal{S}_\varphi$  e mostriamo che

$$u(x) \geq v(x) \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

A tale scopo, distinguiamo due casi.

(I)  $x \in \partial\Omega$ . In questo caso, per definizione si ha

$$u(x) = \varphi(x) \geq v(x).$$

(II)  $x \in \Omega$ . In questo caso, ancora per definizione (e poiché  $u$  risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ) si ha

i)  $\Delta(v - u) = \Delta v - \Delta u = \Delta v \geq 0$  in  $\Omega$ ;

ii)  $v - u \leq \varphi - u = 0$  in  $\partial\Omega$ ;

da qui, usando il (PMD), concludiamo che  $v \leq u$  in  $\Omega$ , e dunque

$$u(x) \geq v(x).$$

## L'idea di Perron

*Dimostrazione - cont.* Per mostrare la disuguaglianza opposta (e dunque completare la dimostrazione del teorema), fissiamo una **qualsiasi**  $v \in \mathcal{S}_\varphi$  e mostriamo che

$$u(x) \geq v(x) \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

A tale scopo, distinguiamo due casi.

(I)  $x \in \partial\Omega$ . In questo caso, per definizione si ha

$$u(x) = \varphi(x) \geq v(x).$$

(II)  $x \in \Omega$ . In questo caso, ancora per definizione (e poiché  $u$  risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ) si ha

i)  $\Delta(v - u) = \Delta v - \Delta u = \Delta v \geq 0$  in  $\Omega$ ;

ii)  $v - u \leq \varphi - u = 0$  in  $\partial\Omega$ ;

da qui, usando il **(PMD)**, concludiamo che  $v \leq u$  in  $\Omega$ , e dunque

$$u(x) \geq v(x).$$

## L'idea di Perron

*Dimostrazione - cont.* Per mostrare la disuguaglianza opposta (e dunque completare la dimostrazione del teorema), fissiamo una **qualsiasi**  $v \in \mathcal{S}_\varphi$  e mostriamo che

$$u(x) \geq v(x) \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

A tale scopo, distinguiamo due casi.

(I)  $x \in \partial\Omega$ . In questo caso, per definizione si ha

$$u(x) = \varphi(x) \geq v(x).$$

(II)  $x \in \Omega$ . In questo caso, ancora per definizione (e poiché  $u$  risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ) si ha

i)  $\Delta(v - u) = \Delta v - \Delta u = \Delta v \geq 0$  in  $\Omega$ ;

ii)  $v - u \leq \varphi - u = 0$  in  $\partial\Omega$ ;

da qui, usando il (PMD), concludiamo che  $v \leq u$  in  $\Omega$ , e dunque

$$u(x) \geq v(x).$$

## L'idea di Perron

*Dimostrazione - cont.* Per mostrare la disuguaglianza opposta (e dunque completare la dimostrazione del teorema), fissiamo una **qualsiasi**  $v \in \mathcal{S}_\varphi$  e mostriamo che

$$u(x) \geq v(x) \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

A tale scopo, distinguiamo due casi.

(I)  $x \in \partial\Omega$ . In questo caso, per definizione si ha

$$u(x) = \varphi(x) \geq v(x).$$

(II)  $x \in \Omega$ . In questo caso, ancora per definizione (e poiché  $u$  risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ) si ha

i)  $\Delta(v - u) = \Delta v - \Delta u = \Delta v \geq 0$  in  $\Omega$ ;

ii)  $v - u \leq \varphi - u = 0$  in  $\partial\Omega$ ;

da qui, usando il (PMD), concludiamo che  $v \leq u$  in  $\Omega$ , e dunque

$$u(x) \geq v(x).$$

## L'idea di Perron

*Dimostrazione - cont.* Per mostrare la disuguaglianza opposta (e dunque completare la dimostrazione del teorema), fissiamo una **qualsiasi**  $v \in \mathcal{S}_\varphi$  e mostriamo che

$$u(x) \geq v(x) \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

A tale scopo, distinguiamo due casi.

(I)  $x \in \partial\Omega$ . In questo caso, per definizione si ha

$$u(x) = \varphi(x) \geq v(x).$$

(II)  $x \in \Omega$ . In questo caso, ancora per definizione (e poiché  $u$  risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ) si ha

i)  $\Delta(v - u) = \Delta v - \Delta u = \Delta v \geq 0$  in  $\Omega$ ;

ii)  $v - u \leq \varphi - u = 0$  in  $\partial\Omega$ ;

da qui, usando il (PMD), concludiamo che  $v \leq u$  in  $\Omega$ , e dunque

$$u(x) \geq v(x).$$

## L'idea di Perron

*Dimostrazione - cont.* Per mostrare la disuguaglianza opposta (e dunque completare la dimostrazione del teorema), fissiamo una **qualsiasi**  $v \in \mathcal{S}_\varphi$  e mostriamo che

$$u(x) \geq v(x) \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

A tale scopo, distinguiamo due casi.

(I)  $x \in \partial\Omega$ . In questo caso, per definizione si ha

$$u(x) = \varphi(x) \geq v(x).$$

(II)  $x \in \Omega$ . In questo caso, ancora per definizione (e poiché  $u$  risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ) si ha

i)  $\Delta(v - u) = \Delta v - \Delta u = \Delta v \geq 0$  in  $\Omega$ ;

ii)  $v - u \leq \varphi - u = 0$  in  $\partial\Omega$ ;

da qui, usando il (PMD), concludiamo che  $v \leq u$  in  $\Omega$ , e dunque

$$u(x) \geq v(x).$$

## L'idea di Perron

*Dimostrazione - cont.* Per mostrare la disuguaglianza opposta (e dunque completare la dimostrazione del teorema), fissiamo una **qualsiasi**  $v \in \mathcal{S}_\varphi$  e mostriamo che

$$u(x) \geq v(x) \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

A tale scopo, distinguiamo due casi.

(I)  $x \in \partial\Omega$ . In questo caso, per definizione si ha

$$u(x) = \varphi(x) \geq v(x).$$

(II)  $x \in \Omega$ . In questo caso, ancora per definizione (e poiché  $u$  risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ) si ha

i)  $\Delta(v - u) = \Delta v - \Delta u = \Delta v \geq 0$  in  $\Omega$ ;

ii)  $v - u \leq \varphi - u = 0$  in  $\partial\Omega$ ;

da qui, usando il (PMD), concludiamo che  $v \leq u$  in  $\Omega$ , e dunque

$$u(x) \geq v(x).$$

## L'idea di Perron

*Dimostrazione - cont.* Per mostrare la disuguaglianza opposta (e dunque completare la dimostrazione del teorema), fissiamo una **qualsiasi**  $v \in \mathcal{S}_\varphi$  e mostriamo che

$$u(x) \geq v(x) \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

A tale scopo, distinguiamo due casi.

(I)  $x \in \partial\Omega$ . In questo caso, per definizione si ha

$$u(x) = \varphi(x) \geq v(x).$$

(II)  $x \in \Omega$ . In questo caso, ancora per definizione (e poiché  $u$  risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ ) si ha

i)  $\Delta(v - u) = \Delta v - \Delta u = \Delta v \geq 0$  in  $\Omega$ ;

ii)  $v - u \leq \varphi - u = 0$  in  $\partial\Omega$ ;

da qui, usando il **(PMD)**, concludiamo che  $v \leq u$  in  $\Omega$ , e dunque

$$u(x) \geq v(x).$$

## L'idea di Perron

Alla luce del Teorema di Perron - ver. 1, è naturale procedere nel modo seguente: se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è un qualsiasi aperto limitato e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , **definiamo**

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) := \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\},$$

e cerchiamo di capire se tale funzione risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ . Possono presentarsi due casi:

- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ , e allora il problema ha soluzione;
- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  non risolve  $(D)_{\Omega, \varphi}$ , e allora il problema **non ammette soluzioni** (se ne avesse una, sappiamo che dovrebbe coincidere con  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ !).

Procediamo allora studiando la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ .

## L'idea di Perron

Alla luce del Teorema di Perron - ver. 1, è naturale procedere nel modo seguente: se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è un **qualsiasi** aperto limitato e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , **definiamo**

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) := \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\},$$

e cerchiamo di capire se tale funzione risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ . Possono presentarsi due casi:

- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , e allora il problema ha soluzione;
- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  non risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , e allora il problema **non ammette soluzioni** (se ne avesse una, sappiamo che dovrebbe coincidere con  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ !).

Procediamo allora studiando la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ .

## L'idea di Perron

Alla luce del Teorema di Perron - ver. 1, è naturale procedere nel modo seguente: se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è un **qualsiasi** aperto limitato e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , **definiamo**

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) := \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\},$$

e cerchiamo di capire se tale funzione risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ . Possono presentarsi due casi:

- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , e allora il problema ha soluzione;
- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  non risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , e allora il problema **non ammette soluzioni** (se ne avesse una, sappiamo che dovrebbe coincidere con  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ !).

Procediamo allora studiando la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ .

## L'idea di Perron

Alla luce del Teorema di Perron - ver. 1, è naturale procedere nel modo seguente: se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è un **qualsiasi** aperto limitato e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , **definiamo**

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) := \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\},$$

e cerchiamo di capire se tale funzione risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ . Possono presentarsi due casi:

- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , e allora il problema ha soluzione;
- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  non risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , e allora il problema **non ammette soluzioni** (se ne avesse una, sappiamo che dovrebbe coincidere con  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ !).

Procediamo allora studiando la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ .

## L'idea di Perron

Alla luce del Teorema di Perron - ver. 1, è naturale procedere nel modo seguente: se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è un **qualsiasi** aperto limitato e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , **definiamo**

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) := \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\},$$

e cerchiamo di capire se tale funzione risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ . Possono presentarsi due casi:

- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , e allora il problema ha soluzione;
- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  non risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , e allora il problema **non ammette soluzioni** (se ne avesse una, sappiamo che dovrebbe coincidere con  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ !).

Procediamo allora studiando la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ .

## L'idea di Perron

Alla luce del Teorema di Perron - ver. 1, è naturale procedere nel modo seguente: se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è un **qualsiasi** aperto limitato e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , **definiamo**

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) := \sup\{v(x) : v \in \mathcal{S}_\varphi\},$$

e cerchiamo di capire se tale funzione risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ . Possono presentarsi due casi:

- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , e allora il problema ha soluzione;
- la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  non risolve  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , e allora il problema **non ammette soluzioni** (se ne avesse una, sappiamo che dovrebbe coincidere con  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ !).

Procediamo allora studiando la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ .

# Il metodo di Perron



## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Per questo motivo, è naturale sostituire  $\mathcal{S}_\varphi$  con una classe di funzioni **meno regolari**.

Naturalmente, non vogliamo fare tale sostituzione in modo arbitrario, ma vogliamo mantenere il significato della condizione  $\Delta v \geq 0$  (fondamentale nel Teorema di Perron - ver. 1).

Cerchiamo allora di riformulare tale proprietà in un modo che **non richieda derivate seconde**.

### Analogia con le funzioni armoniche

Questa idea non è così innaturale, se teniamo a mente la caratterizzazione

$u$  armonica in  $\Omega \iff u \in C(\Omega)$  e soddisfa la formula di media.

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Per questo motivo, è naturale sostituire  $S_\varphi$  con una classe di funzioni **meno regolari**.

Naturalmente, non vogliamo fare tale sostituzione in modo arbitrario, ma vogliamo mantenere il significato della condizione  $\Delta v \geq 0$  (fondamentale nel Teorema di Perron - ver. 1).

Cerchiamo allora di riformulare tale proprietà in un modo che **non richieda derivate seconde**.

### Analogia con le funzioni armoniche

Questa idea non è così innaturale, se teniamo a mente la caratterizzazione

$u$  armonica in  $\Omega \iff u \in C(\Omega)$  e soddisfa la formula di media.

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Per questo motivo, è naturale sostituire  $\mathcal{S}_\varphi$  con una classe di funzioni **meno regolari**.

Naturalmente, non vogliamo fare tale sostituzione in modo arbitrario, ma vogliamo mantenere il significato della condizione  $\Delta v \geq 0$  (fondamentale nel Teorema di Perron - ver. 1).

Cerchiamo allora di riformulare tale proprietà in un modo che **non richieda derivate seconde**.

### Analogia con le funzioni armoniche

Questa idea non è così innaturale, se teniamo a mente la caratterizzazione

$$u \text{ armonica in } \Omega \iff u \in C(\Omega) \text{ e soddisfa la formula di media.}$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Per questo motivo, è naturale sostituire  $\mathcal{S}_\varphi$  con una classe di funzioni **meno regolari**.

Naturalmente, non vogliamo fare tale sostituzione in modo arbitrario, ma vogliamo mantenere il significato della condizione  $\Delta v \geq 0$  (fondamentale nel Teorema di Perron - ver. 1).

Cerchiamo allora di riformulare tale proprietà in un modo che **non richieda derivate seconde**.

### Analogia con le funzioni armoniche

Questa idea non è così innaturale, se teniamo a mente la caratterizzazione

$$u \text{ armonica in } \Omega \iff u \in C(\Omega) \text{ e soddisfa la formula di media.}$$

# 1) Funzioni subarmoniche e loro proprietà

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Sia quindi  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto qualsiasi** (non necessariamente limitato), e sia  $v \in C^2(\mathcal{O})$ . Nel caso particolare in cui  $\mathcal{O} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , sappiamo che

$$\Delta v \geq 0 \text{ in } \mathcal{O} \iff v \text{ è convessa in } \mathcal{O};$$

dunque, se  $x_0 \in \mathcal{O}$  e  $r > 0$  è tale che  $I = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \bar{I} \subseteq \mathcal{O}$ , il grafico della funzione  $v$  sull'intervallo  $I$  giace **al di sotto** del segmento che congiunge i punti

$$A = (x_0 - r, v(x_0 - r)), \quad B = (x_0 + r, v(x_0 + r)).$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Sia quindi  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto qualsiasi** (non necessariamente limitato), e sia  $v \in C^2(\mathcal{O})$ . Nel caso particolare in cui  $\mathcal{O} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , sappiamo che

$$\Delta v \geq 0 \text{ in } \mathcal{O} \iff v \text{ è convessa in } \mathcal{O};$$

dunque, se  $x_0 \in \mathcal{O}$  e  $r > 0$  è tale che  $I = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \bar{I} \subseteq \mathcal{O}$ , il grafico della funzione  $v$  sull'intervallo  $I$  giace **al di sotto** del segmento che congiunge i punti

$$A = (x_0 - r, v(x_0 - r)), \quad B = (x_0 + r, v(x_0 + r)).$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

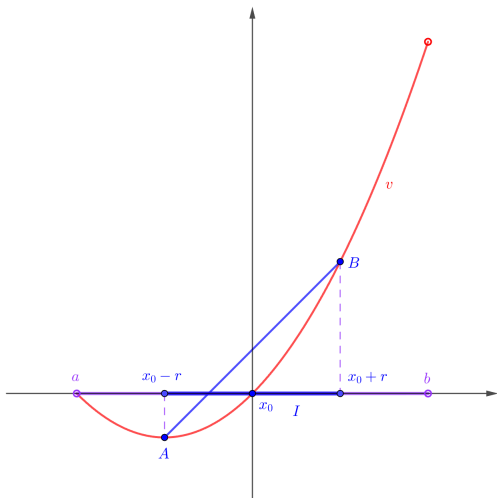
Sia quindi  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto qualsiasi** (non necessariamente limitato), e sia  $v \in C^2(\mathcal{O})$ . Nel caso particolare in cui  $\mathcal{O} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , sappiamo che

$$\Delta v \geq 0 \text{ in } \mathcal{O} \iff v \text{ è convessa in } \mathcal{O};$$

dunque, se  $x_0 \in \mathcal{O}$  e  $r > 0$  è tale che  $I = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \bar{I} \subseteq \mathcal{O}$ , il grafico della funzione  $v$  sull'intervallo  $I$  giace **al di sotto** del segmento che congiunge i punti

$$A = (x_0 - r, v(x_0 - r)), \quad B = (x_0 + r, v(x_0 + r)).$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà



## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

La funzione (affine)  $r$  che ha come grafico tale segmento, però, è precisamente **l'unica funzione armonica in  $I$  che coincide con  $v$  agli estremi**, ossia l'unica soluzione del problema di Dirichlet

$$(D)_{I,v} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } I \\ u = v & \text{in } \partial I \end{cases}$$

In altre parole, assumendo  $v \in C^2(\mathcal{O})$ , si ha che  $\Delta v \geq 0$  in  $\mathcal{O}$  **se e solo se**

$$\text{per ogni } x_0 \in \mathcal{O}, r > 0 \text{ tale che } I = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \bar{I} \subseteq \mathcal{O} \text{ risulta} \quad (*)$$
$$v \leq H'_v \text{ in } I,$$

dove  $H'_v$  è l'unica soluzione del problema  $(D)_{I,v}$ .

### Bontà della condizione (\*)

La condizione (\*) **non coinvolge le derivate seconde di  $v$** , e si estende naturalmente a dimensione arbitraria assumendo solo  $v \in C(\mathcal{O})$ !

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

La funzione (affine)  $r$  che ha come grafico tale segmento, però, è precisamente **l'unica funzione armonica in  $I$  che coincide con  $v$  agli estremi**, ossia l'unica soluzione del problema di Dirichlet

$$(D)_{I,v} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } I \\ u = v & \text{in } \partial I \end{cases}$$

In altre parole, assumendo  $v \in C^2(\mathcal{O})$ , si ha che  $\Delta v \geq 0$  in  $\mathcal{O}$  **se e solo se**

$$\text{per ogni } x_0 \in \mathcal{O}, r > 0 \text{ tale che } I = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \bar{I} \subseteq \mathcal{O} \text{ risulta} \quad (*)$$
$$v \leq \mathbf{H}_v^I \text{ in } I,$$

dove  $\mathbf{H}_v^I$  è l'unica soluzione del problema  $(D)_{I,v}$ .

### Bontà della condizione (\*)

La condizione (\*) **non coinvolge le derivate seconde di  $v$** , e si estende naturalmente a dimensione arbitraria assumendo solo  $v \in C(\mathcal{O})$ !

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

La funzione (affine)  $r$  che ha come grafico tale segmento, però, è precisamente **l'unica funzione armonica in  $I$  che coincide con  $v$  agli estremi**, ossia l'unica soluzione del problema di Dirichlet

$$(D)_{I,v} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } I \\ u = v & \text{in } \partial I \end{cases}$$

In altre parole, assumendo  $v \in C^2(\mathcal{O})$ , si ha che  $\Delta v \geq 0$  in  $\mathcal{O}$  **se e solo se**

$$\begin{aligned} &\text{per ogni } x_0 \in \mathcal{O}, r > 0 \text{ tale che } I = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \bar{I} \subseteq \mathcal{O} \text{ risulta} \\ &v \leq \mathbf{H}_v^I \text{ in } I, \end{aligned} \quad (*)$$

dove  $\mathbf{H}_v^I$  è l'unica soluzione del problema  $(D)_{I,v}$ .

### Bontà della condizione (\*)

La condizione (\*) **non coinvolge le derivate seconde di  $v$** , e si estende naturalmente a dimensione arbitraria assumendo solo  $v \in C(\mathcal{O})$ !

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Diamo allora la seguente definizione.

### Definizione (funzione subarmonica/superarmonica)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto qualsiasi** (non necessariamente limitato), e sia  $v \in C(\mathcal{O})$ . Diciamo che  $v$  è **subarmonica in**  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , se vale la condizione seguente:

per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$  e per ogni  $r > 0$  tale che  $B_r(x_0) \subseteq \bar{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$  si ha

$$v(x) \leq \mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}(x) \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

dove  $\mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}$  indica l'unica soluzione del problema di Dirichlet  $(D)_{B_r(x_0), v}$ .

Diciamo poi che  $v$  è **superarmonica in**  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , se  $-v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ .

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Diamo allora la seguente definizione.

### Definizione (funzione subarmonica/superarmonica)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto qualsiasi** (non necessariamente limitato), e sia  $v \in C(\mathcal{O})$ . Diciamo che  $v$  è **subarmonica** in  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , se vale la condizione seguente:

per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$  e per ogni  $r > 0$  tale che  $B_r(x_0) \subseteq \bar{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$  si ha

$$v(x) \leq \mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}(x) \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

dove  $\mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}$  indica l'unica soluzione del problema di Dirichlet  $(D)_{B_r(x_0), v}$ .

Diciamo poi che  $v$  è **superarmonica** in  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , se  $-v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ .

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Diamo allora la seguente definizione.

### Definizione (funzione subarmonica/superarmonica)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto qualsiasi** (non necessariamente limitato), e sia  $v \in C(\mathcal{O})$ . Diciamo che  $v$  è **subarmonica in**  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , se vale la condizione seguente:

per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$  e per ogni  $r > 0$  tale che  $B_r(x_0) \subseteq \bar{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$  si ha

$$v(x) \leq \mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}(x) \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

dove  $\mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}$  indica l'unica soluzione del problema di Dirichlet  $(D)_{B_r(x_0), v}$ .

Diciamo poi che  $v$  è **superarmonica in**  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , se  $-v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ .

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Diamo allora la seguente definizione.

### Definizione (funzione subarmonica/superarmonica)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto qualsiasi** (non necessariamente limitato), e sia  $v \in C(\mathcal{O})$ . Diciamo che  $v$  è **subarmonica in**  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , se vale la condizione seguente:

per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$  e per ogni  $r > 0$  tale che  $B_r(x_0) \subseteq \bar{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$  si ha

$$v(x) \leq \mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}(x) \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

dove  $\mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}$  indica l'unica soluzione del problema di Dirichlet  $(D)_{B_r(x_0), v}$ .

Diciamo poi che  $v$  è **superarmonica in**  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , se  $-v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ .

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Diamo allora la seguente definizione.

### Definizione (funzione subarmonica/superarmonica)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto qualsiasi** (non necessariamente limitato), e sia  $v \in C(\mathcal{O})$ . Diciamo che  $v$  è **subarmonica in**  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , se vale la condizione seguente:

per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$  e per ogni  $r > 0$  tale che  $B_r(x_0) \subseteq \bar{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$  si ha

$$v(x) \leq \mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}(x) \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

dove  $\mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}$  indica l'unica soluzione del problema di Dirichlet  $(D)_{B_r(x_0), v}$ .

Diciamo poi che  $v$  è **superarmonica in**  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , se  $-v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ .

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Diamo allora la seguente definizione.

### Definizione (funzione subarmonica/superarmonica)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un **aperto qualsiasi** (non necessariamente limitato), e sia  $v \in C(\mathcal{O})$ . Diciamo che  $v$  è **subarmonica in**  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , se vale la condizione seguente:

per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$  e per ogni  $r > 0$  tale che  $B_r(x_0) \subseteq \bar{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$  si ha

$$v(x) \leq \mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}(x) \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

dove  $\mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}$  indica l'unica soluzione del problema di Dirichlet  $(D)_{B_r(x_0), v}$ .

Diciamo poi che  $v$  è **superarmonica in**  $\mathcal{O}$ , e scriviamo  $v \in \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{O})$ , se  $-v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ .

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Un paio di osservazioni

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in C(\mathcal{O})$ . Siano poi  $x_0 \in \mathcal{O}$  e  $r > 0$  tali che

$$B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}.$$

Valgono le seguenti osservazioni.

- (1) Poiché sappiamo che il problema di Dirichlet su una palla  $\overline{B}$  ha sempre un'unica soluzione (per ogni  $\varphi \in C(\partial B)$ ), e poiché  $v \in C(\partial B_r(x_0))$  (essendo  $\overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ ), la funzione

$$H_v^{B_r(x_0)}$$

esiste ed è unica (e dunque la definizione appena data è ben posta). Inoltre, si ha

$$H_v^{B_r(x_0)}(x) = \frac{1}{\omega_n r} \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n} d\sigma(y) \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Un paio di osservazioni

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in C(\mathcal{O})$ . Siano poi  $x_0 \in \mathcal{O}$  e  $r > 0$  tali che

$$B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}.$$

Valgono le seguenti osservazioni.

- (1) Poiché sappiamo che il problema di Dirichlet su una palla  $\overline{B}$  ha sempre un'unica soluzione (per ogni  $\varphi \in C(\partial B)$ ), e poiché  $v \in C(\partial B_r(x_0))$  (essendo  $\overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ ), la funzione

$$H_v^{B_r(x_0)}$$

esiste ed è unica (e dunque la definizione appena data è ben posta). Inoltre, si ha

$$H_v^{B_r(x_0)}(x) = \frac{1}{\omega_n r} \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n} d\sigma(y) \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Un paio di osservazioni

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in C(\mathcal{O})$ . Siano poi  $x_0 \in \mathcal{O}$  e  $r > 0$  tali che

$$B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}.$$

Valgono le seguenti osservazioni.

- (1) Poiché sappiamo che il problema di Dirichlet su una palla  $\overline{B}_r$  ha sempre un'unica soluzione (per ogni  $\varphi \in C(\partial B)$ ), e poiché  $v \in C(\partial B_r(x_0))$  (essendo  $\overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ ), la funzione

$$H_v^{B_r(x_0)}$$

esiste ed è unica (e dunque la definizione appena data è ben posta). Inoltre, si ha

$$H_v^{B_r(x_0)}(x) = \frac{1}{\omega_n r} \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n} d\sigma(y) \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Un paio di osservazioni

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in C(\mathcal{O})$ . Siano poi  $x_0 \in \mathcal{O}$  e  $r > 0$  tali che

$$B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}.$$

Valgono le seguenti osservazioni.

- (1) Poiché sappiamo che il problema di Dirichlet su una palla  $\overline{B}_r$  ha sempre un'unica soluzione (per ogni  $\varphi \in C(\partial B)$ ), e poiché  $v \in C(\partial B_r(x_0))$  (essendo  $\overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ ), la funzione

$$\mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}$$

esiste ed è unica (e dunque la definizione appena data è ben posta). Inoltre, si ha

$$\mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}(x) = \frac{1}{\omega_n r} \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^n} d\sigma(y) \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Un paio di osservazioni - cont.

- (2) Usando ancora l'esistenza di un'unica soluzione per il problema di Dirichlet sulle palle (per ogni dato continuo sul bordo), si vede facilmente che

$$v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) \cap \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{O}) \iff v \text{ è armonica in } \mathcal{O}.$$

In particolare, se  $v \in C^2(\mathcal{O})$ , si ha

$$v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) \iff \Delta v \geq 0 \text{ in } \mathcal{O}.$$

Di conseguenza, la definizione di funzione subarmonica appena data estende coerentemente la condizione  $\Delta v \geq 0$  (come volevamo).

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Un paio di osservazioni - cont.

- (2) Usando ancora l'esistenza di un'unica soluzione per il problema di Dirichlet sulle palle (per ogni dato continuo sul bordo), si vede facilmente che

$$v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) \cap \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{O}) \iff v \text{ è armonica in } \mathcal{O}.$$

In particolare, se  $v \in C^2(\mathcal{O})$ , si ha

$$v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) \iff \Delta v \geq 0 \text{ in } \mathcal{O}.$$

Di conseguenza, la definizione di funzione subarmonica appena data estende coerentemente la condizione  $\Delta v \geq 0$  (come volevamo).

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Un paio di osservazioni - cont.

- (2) Usando ancora l'esistenza di un'unica soluzione per il problema di Dirichlet sulle palle (per ogni dato continuo sul bordo), si vede facilmente che

$$v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) \cap \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{O}) \iff v \text{ è armonica in } \mathcal{O}.$$

In particolare, se  $v \in C^2(\mathcal{O})$ , si ha

$$v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) \iff \Delta v \geq 0 \text{ in } \mathcal{O}.$$

Di conseguenza, la definizione di funzione subarmonica appena data **estende coerentemente** la condizione  $\Delta v \geq 0$  (come volevamo).

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Il seguente teorema contiene le principali proprietà delle funzioni subarmoniche.

### Teorema (Proprietà delle funzioni subarmoniche)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) (\subseteq C(\mathcal{O}))$ . Allora:

(1) Per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che  $B_r(x_0) \subseteq \bar{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ , si ha

$$v(x_0) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) d\sigma(y) = \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) d\sigma(y).$$

(2) Per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che  $B_r(x_0) \subseteq \bar{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ , si ha

$$v(x_0) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} v(y) dy = \int_{B_r(x_0)} v(y) dy.$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Il seguente teorema contiene le principali proprietà delle funzioni subarmoniche.

### Teorema (Proprietà delle funzioni subarmoniche)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) (\subseteq C(\mathcal{O}))$ . Allora:

(1) Per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che  $B_r(x_0) \subseteq \bar{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ , si ha

$$v(x_0) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) d\sigma(y) = \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) d\sigma(y).$$

(2) Per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che  $B_r(x_0) \subseteq \bar{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ , si ha

$$v(x_0) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} v(y) dy = \int_{B_r(x_0)} v(y) dy.$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Il seguente teorema contiene le principali proprietà delle funzioni subarmoniche.

### Teorema (Proprietà delle funzioni subarmoniche)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O}) (\subseteq C(\mathcal{O}))$ . Allora:

(1) Per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che  $B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ , si ha

$$v(x_0) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) d\sigma(y) = \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) d\sigma(y).$$

(2) Per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che  $B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ , si ha

$$v(x_0) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} v(y) dy = \int_{B_r(x_0)} v(y) dy.$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Il seguente teorema contiene le principali proprietà delle funzioni subarmoniche.

### Teorema (Proprietà delle funzioni subarmoniche)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O}) (\subseteq C(\mathcal{O}))$ . Allora:

(1) Per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che  $B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ , si ha

$$v(x_0) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) d\sigma(y) = \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) d\sigma(y).$$

(2) Per ogni  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che  $B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}$ , si ha

$$v(x_0) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} v(y) dy = \int_{B_r(x_0)} v(y) dy.$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Teorema (Proprietà delle funzioni subarmoniche) - cont.

- (3) **(PMF)** Se  $\mathcal{O}$  è **connesso** ed esiste  $x_0 \in \mathcal{O}$  tale che  $v(x) \leq v(x_0)$  per ogni  $x \in \mathcal{O}$  (cioè la funzione  $v$  ha un punto di massimo **in**  $\mathcal{O}$ ), allora

$$v \equiv v(x_0) \text{ in } \mathcal{O}.$$

- (4) **(PMD)** Se  $\mathcal{O}$  è **limitato** e, in più,  $v \in C(\overline{\mathcal{O}})$ , allora

$$\max_{\overline{\mathcal{O}}} v = \max_{\partial\mathcal{O}} v.$$

- (5) Se  $v_1, v_2 \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , allora

i)  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0;$

ii)  $\max\{v_1, v_2\} \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O}).$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Teorema (Proprietà delle funzioni subarmoniche) - cont.

- (3) **(PMF)** Se  $\mathcal{O}$  è **connesso** ed esiste  $x_0 \in \mathcal{O}$  tale che  $v(x) \leq v(x_0)$  per ogni  $x \in \mathcal{O}$  (cioè la funzione  $v$  ha un punto di massimo **in**  $\mathcal{O}$ ), allora

$$v \equiv v(x_0) \text{ in } \mathcal{O}.$$

- (4) **(PMD)** Se  $\mathcal{O}$  è **limitato** e, in più,  $v \in C(\overline{\mathcal{O}})$ , allora

$$\max_{\overline{\mathcal{O}}} v = \max_{\partial\mathcal{O}} v.$$

- (5) Se  $v_1, v_2 \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , allora

$$\text{i) } \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0;$$

$$\text{ii) } \max\{v_1, v_2\} \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O}).$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Teorema (Proprietà delle funzioni subarmoniche) - cont.

- (3) **(PMF)** Se  $\mathcal{O}$  è **connesso** ed esiste  $x_0 \in \mathcal{O}$  tale che  $v(x) \leq v(x_0)$  per ogni  $x \in \mathcal{O}$  (cioè la funzione  $v$  ha un punto di massimo **in**  $\mathcal{O}$ ), allora

$$v \equiv v(x_0) \text{ in } \mathcal{O}.$$

- (4) **(PMD)** Se  $\mathcal{O}$  è **limitato** e, in più,  $v \in C(\overline{\mathcal{O}})$ , allora

$$\max_{\overline{\mathcal{O}}} v = \max_{\partial\mathcal{O}} v.$$

- (5) Se  $v_1, v_2 \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ , allora

i)  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0;$

ii)  $\max\{v_1, v_2\} \in \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O}).$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Corollario (PMD - 2a forma)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto **limitato**, e sia  $v \in C(\overline{\mathcal{O}}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{O})$ . Sia poi  $h \in C(\overline{\mathcal{O}})$  una funzione armonica in  $\mathcal{O}$ , con  $v \leq h$  in  $\partial\mathcal{O}$ . Allora:

$$v \leq h \text{ in } \mathcal{O}.$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Corollario (PMD - 2a forma)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto **limitato**, e sia  $v \in C(\overline{\mathcal{O}}) \cap \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ . Sia poi  $h \in C(\overline{\mathcal{O}})$  una funzione **armonica in  $\mathcal{O}$** , con  $v \leq h$  in  $\partial\mathcal{O}$ . Allora:

$$v \leq h \text{ in } \mathcal{O}.$$

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Una formulazione equivalente della definizione di subarmonicità

La dimostrazione “classica” del teorema precedente mostra che, come nel caso delle funzioni armoniche, sono in realtà **equivalenti** le affermazioni seguenti:

- (1)  $v \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$ ;
  - (2)  $v$  soddisfa la proprietà (1);
  - (3)  $v$  soddisfa la proprietà (2)
- (qui, al solito,  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi).

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Una formulazione equivalente della definizione di subarmonicità

La dimostrazione “classica” del teorema precedente mostra che, come nel caso delle funzioni armoniche, sono in realtà **equivalenti** le affermazioni seguenti:

- (1)  $v \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$ ;
- (2)  $v$  soddisfa la proprietà (1);
- (3)  $v$  soddisfa la proprietà (2)

(qui, al solito,  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi).

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Una formulazione equivalente della definizione di subarmonicità

La dimostrazione “classica” del teorema precedente mostra che, come nel caso delle funzioni armoniche, sono in realtà **equivalenti** le affermazioni seguenti:

- (1)  $v \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$ ;
- (2)  $v$  soddisfa la proprietà (1);
- (3)  $v$  soddisfa la proprietà (2)

(qui, al solito,  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi).

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

### Una formulazione equivalente della definizione di subarmonicità

La dimostrazione “classica” del teorema precedente mostra che, come nel caso delle funzioni armoniche, sono in realtà **equivalenti** le affermazioni seguenti:

- (1)  $v \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$ ;
- (2)  $v$  soddisfa la proprietà (1);
- (3)  $v$  soddisfa la proprietà (2)

(qui, al solito,  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi).

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Un'ultima proprietà delle funzioni subarmoniche (così come le abbiamo definite) è la possibilità di *raddrizzarle* preservando la subarmonicità.

### Teorema (regolarizzata di Perron)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) (\subseteq C(\mathcal{O}))$ . Siano poi  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che

$$B_r(x_0) \subseteq \overline{B_r(x_0)} \subseteq \mathcal{O}.$$

Allora, la funzione

$$(v)_{B_r(x_0)} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v)_{B_r(x_0)}(x) = \begin{cases} v & \text{se } x \notin B_r(x_0), \\ \mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}(x) & \text{se } x \in B_r(x_0) \end{cases}$$

(detta **regolarizza di Perron di  $v$  in  $B_r(x_0)$** ) verifica le proprietà seguenti:

- (1)  $v \leq (v)_{B_r(x_0)}$  in  $\mathcal{O}$ ;
- (2)  $(v)_{B_r(x_0)} \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$  e  $(v)_{B_r(x_0)}$  è armonica in  $B_r(x_0)$ .

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Un'ultima proprietà delle funzioni subarmoniche (così come le abbiamo definite) è la possibilità di *raddrizzarle* preservando la subarmonicità.

### Teorema (regolarizzata di Perron)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) (\subseteq C(\mathcal{O}))$ . Siano poi  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che

$$B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}.$$

Allora, la funzione

$$(v)_{B_r(x_0)} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v)_{B_r(x_0)}(x) = \begin{cases} v & \text{se } x \notin B_r(x_0), \\ H_v^{B_r(x_0)}(x) & \text{se } x \in B_r(x_0) \end{cases}$$

(detta *regolarizza di Perron di  $v$  in  $B_r(x_0)$* ) verifica le proprietà seguenti:

- (1)  $v \leq (v)_{B_r(x_0)}$  in  $\mathcal{O}$ ;
- (2)  $(v)_{B_r(x_0)} \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$  e  $(v)_{B_r(x_0)}$  è armonica in  $B_r(x_0)$ .

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Un'ultima proprietà delle funzioni subarmoniche (così come le abbiamo definite) è la possibilità di *raddrizzarle* preservando la subarmonicità.

### Teorema (regolarizzata di Perron)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) (\subseteq C(\mathcal{O}))$ . Siano poi  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che

$$B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}.$$

Allora, la funzione

$$(v)_{B_r(x_0)} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v)_{B_r(x_0)}(x) = \begin{cases} v & \text{se } x \notin B_r(x_0), \\ \mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}(x) & \text{se } x \in B_r(x_0) \end{cases}$$

(detta **regolarizza di Perron di  $v$  in  $B_r(x_0)$** ) verifica le proprietà seguenti:

- (1)  $v \leq (v)_{B_r(x_0)}$  in  $\mathcal{O}$ ;
- (2)  $(v)_{B_r(x_0)} \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$  e  $(v)_{B_r(x_0)}$  è armonica in  $B_r(x_0)$ .

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Un'ultima proprietà delle funzioni subarmoniche (così come le abbiamo definite) è la possibilità di *raddrizzarle* preservando la subarmonicità.

### Teorema (regolarizzata di Perron)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) (\subseteq C(\mathcal{O}))$ . Siano poi  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che

$$B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}.$$

Allora, la funzione

$$(v)_{B_r(x_0)} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v)_{B_r(x_0)}(x) = \begin{cases} v & \text{se } x \notin B_r(x_0), \\ \mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}(x) & \text{se } x \in B_r(x_0) \end{cases}$$

(detta **regolarizza di Perron di  $v$  in  $B_r(x_0)$** ) verifica le proprietà seguenti:

- (1)  $v \leq (v)_{B_r(x_0)}$  in  $\mathcal{O}$ ;
- (2)  $(v)_{B_r(x_0)} \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$  e  $(v)_{B_r(x_0)}$  è armonica in  $B_r(x_0)$ .

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Un'ultima proprietà delle funzioni subarmoniche (così come le abbiamo definite) è la possibilità di *raddrizzarle* preservando la subarmonicità.

### Teorema (regolarizzata di Perron)

Sia  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto qualsiasi, e sia  $v \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) (\subseteq C(\mathcal{O}))$ . Siano poi  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $r > 0$  tali che

$$B_r(x_0) \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathcal{O}.$$

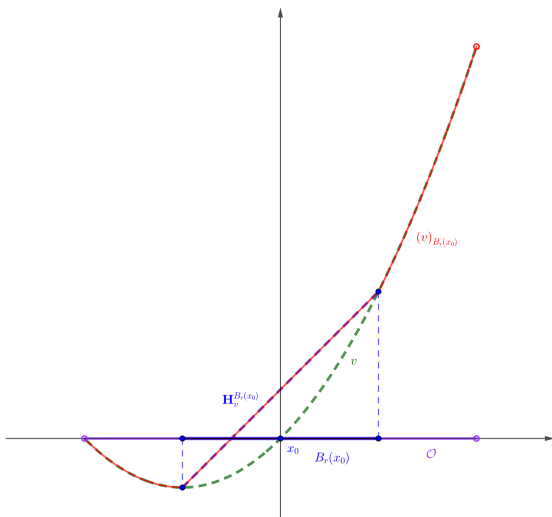
Allora, la funzione

$$(v)_{B_r(x_0)} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v)_{B_r(x_0)}(x) = \begin{cases} v & \text{se } x \notin B_r(x_0), \\ \mathbf{H}_v^{B_r(x_0)}(x) & \text{se } x \in B_r(x_0) \end{cases}$$

(detta **regolarizza di Perron di  $v$  in  $B_r(x_0)$** ) verifica le proprietà seguenti:

- (1)  $v \leq (v)_{B_r(x_0)}$  in  $\mathcal{O}$ ;
- (2)  $(v)_{B_r(x_0)} \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$  e  $(v)_{B_r(x_0)}$  è armonica in  $B_r(x_0)$ .

## Funzioni subarmoniche e loro proprietà



## 2) Il Teorema di Perron



## Il Teorema di Perron

Ora che abbiamo a disposizione la nozione di **funzione subarmonica** (che riformula la proprietà  $\Delta v \geq 0$  senza usare le derivate), possiamo riprendere lo studio del problema di Dirichlet.

Siano quindi  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , fissati una volta per tutte. Ricordando il Teorema di Perron - ver. 1, ma utilizzando la *nuova formulazione* della proprietà  $\Delta v \geq 0$  appena menzionata, definiamo la seguente funzione

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{L}(\varphi)\},$$

dove

$$\mathcal{L}(\varphi) = \{v \in C(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{L}(\Omega) : v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega\}.$$

## Il Teorema di Perron

Ora che abbiamo a disposizione la nozione di **funzione subarmonica** (che riformula la proprietà  $\Delta v \geq 0$  senza usare le derivate), possiamo riprendere lo studio del problema di Dirichlet.

Siano quindi  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , fissati una volta per tutte. Ricordando il Teorema di Perron - ver. 1, ma utilizzando la *nuova formulazione* della proprietà  $\Delta v \geq 0$  appena menzionata, definiamo la seguente funzione

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \sup\{v(x) : v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)\},$$

dove

$$\underline{\mathcal{L}}(\varphi) = \{v \in C(\bar{\Omega}) \cap \underline{\mathcal{L}}(\Omega) : v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega\}.$$

## Il Teorema di Perron

Ora che abbiamo a disposizione la nozione di **funzione subarmonica** (che riformula la proprietà  $\Delta v \geq 0$  senza usare le derivate), possiamo riprendere lo studio del problema di Dirichlet.

Siano quindi  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , fissati una volta per tutte. Ricordando il Teorema di Perron - ver. 1, ma utilizzando la *nuova formulazione* della proprietà  $\Delta v \geq 0$  appena menzionata, definiamo la seguente funzione

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \sup\{v(x) : v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)\},$$

dove

$$\underline{\mathcal{L}}(\varphi) = \{v \in C(\bar{\Omega}) \cap \underline{\mathcal{L}}(\Omega) : v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega\}.$$

## Il Teorema di Perron

### Simili, ma diverse

Nonostante abbiamo insistito molto sull'idea intuitiva

$$v \in \mathcal{L}(\Omega) \iff \Delta v \geq 0,$$

(anche alla luce dei risultati dimostrati), tale equivalenza è vera **solo se**  $v \in C^2(\Omega)$  (proprietà che non richiediamo alle funzioni in  $\mathcal{L}(\varphi)$ ). Di conseguenza, si ha

$$\mathcal{S}_\varphi \subseteq \mathcal{L}(\varphi) \implies \mathcal{P}_\varphi^\Omega \subseteq \mathcal{D}_\varphi^\Omega$$

(dove  $\mathcal{S}_\varphi^\Omega$  e  $\mathcal{P}$  sono quelli definiti nel Teorema di Perron - ver. 1).

## Il Teorema di Perron

### Simili, ma diverse

Nonostante abbiamo insistito molto sull'idea intuitiva

$$v \in \underline{\mathcal{L}}(\Omega) \iff \Delta v \geq 0,$$

(anche alla luce dei risultati dimostrati), tale equivalenza è vera **solo se**  $v \in C^2(\Omega)$  (proprietà che non richiediamo alle funzioni in  $\underline{\mathcal{L}}(\varphi)$ ). Di conseguenza, si ha

$$\mathcal{S}_\varphi \subseteq \underline{\mathcal{L}}(\varphi) \implies \mathcal{P}_\varphi^\Omega \leq \mathcal{P}_\varphi^\Omega$$

(dove  $\mathcal{S}_\varphi^\Omega$  e  $\mathcal{P}$  sono quelli definiti nel Teorema di Perron - ver. 1).

## Il Teorema di Perron

### Alcune proprietà di $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$

(1) Posto  $m = \min_{\partial\Omega} \varphi$ ,  $M = \max_{\partial\Omega} \varphi$ , risulta

$$m \leq \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \leq M \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Infatti, poiché la funzione costante  $v_m = m$  appartiene a  $\underline{\mathcal{L}}(\varphi)$ , per definizione si ha

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \sup\{v(x) : v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)\} \geq v_m(x) = m \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

D'altra parte, data una qualsiasi  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)$ , dal (PMD) segue che

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v \leq M \quad (\text{poiché } v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega);$$

di conseguenza, otteniamo

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \sup\{v(x) : v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)\} \leq M \quad x \in \bar{\Omega}.$$

## Il Teorema di Perron

### Alcune proprietà di $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$

(1) Posto  $m = \min_{\partial\Omega} \varphi$ ,  $M = \max_{\partial\Omega} \varphi$ , risulta

$$m \leq \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \leq M \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Infatti, poiché la funzione costante  $v_m = m$  appartiene a  $\underline{\mathcal{L}}(\varphi)$ , per definizione si ha

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \sup\{v(x) : v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)\} \geq v_m(x) = m \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

D'altra parte, data una qualsiasi  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)$ , dal (PMD) segue che

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v \leq M \quad (\text{poiché } v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega);$$

di conseguenza, otteniamo

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \sup\{v(x) : v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)\} \leq M \quad x \in \bar{\Omega}.$$

## Il Teorema di Perron

### Alcune proprietà di $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$

(1) Posto  $m = \min_{\partial\Omega} \varphi$ ,  $M = \max_{\partial\Omega} \varphi$ , risulta

$$m \leq \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \leq M \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Infatti, poiché la funzione costante  $v_m = m$  appartiene a  $\mathcal{L}(\varphi)$ , per definizione si ha

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{L}(\varphi)\} \geq v_m(x) = m \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

D'altra parte, data una qualsiasi  $v \in \mathcal{L}(\varphi)$ , dal **(PMD)** segue che

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v \leq M \quad (\text{poiché } v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega);$$

di conseguenza, otteniamo

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{L}(\varphi)\} \leq M \quad x \in \bar{\Omega}.$$

## Il Teorema di Perron

### Alcune proprietà di $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$

(1) Posto  $m = \min_{\partial\Omega} \varphi$ ,  $M = \max_{\partial\Omega} \varphi$ , risulta

$$m \leq \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \leq M \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Infatti, poiché la funzione costante  $v_m = m$  appartiene a  $\mathcal{L}(\varphi)$ , per definizione si ha

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{L}(\varphi)\} \geq v_m(x) = m \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

D'altra parte, data una qualsiasi  $v \in \mathcal{L}(\varphi)$ , dal **(PMD)** segue che

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v \leq M \quad (\text{poiché } v \leq \varphi \text{ in } \partial\Omega);$$

di conseguenza, otteniamo

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{L}(\varphi)\} \leq M \quad x \in \bar{\Omega}.$$

## Il Teorema di Perron

### Alcune proprietà di $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ - cont.

(2) Poiché ogni  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)$  soddisfa  $v \leq \varphi$  in  $\partial\Omega$ , si ha

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

(3) Nonostante, in generale,  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \leq \mathcal{P}_\varphi^\Omega$ , anche per questa “nuova” funzione vale il Teorema di Perron - ver. 1: più precisamente, se esiste la soluzione  $u$  del problema  $(D)_{\Omega, \varphi}$ , allora

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega = u.$$

Tale fatto può essere dimostrato *esattamente* come il Teorema di Perron - ver. 1, utilizzando il (PMD)-2a forma (al posto del principio di massimo per funzioni  $v \in C^2$  con  $\Delta v \geq 0$ ).

## Il Teorema di Perron

### Alcune proprietà di $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ - cont.

(2) Poiché ogni  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)$  soddisfa  $v \leq \varphi$  in  $\partial\Omega$ , si ha

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

(3) Nonostante, in generale,  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \leq \mathcal{P}_\varphi^\Omega$ , anche per questa “nuova” funzione vale il Teorema di Perron - ver. 1: più precisamente, se esiste la soluzione  $u$  del problema  $(D)_{\Omega, \varphi}$ , allora

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega = u.$$

Tale fatto può essere dimostrato *esattamente* come il Teorema di Perron - ver. 1, utilizzando il (PMD)-2a forma (al posto del principio di massimo per funzioni  $v \in C^2$  con  $\Delta v \geq 0$ ).

## Il Teorema di Perron

### Alcune proprietà di $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ - cont.

(2) Poiché ogni  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)$  soddisfa  $v \leq \varphi$  in  $\partial\Omega$ , si ha

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

(3) Nonostante, in generale,  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \leq \mathcal{P}_\varphi^\Omega$ , anche per questa “nuova” funzione vale il Teorema di Perron - ver. 1: più precisamente, **se** esiste la soluzione  $u$  del problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , allora

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega = u.$$

Tale fatto può essere dimostrato *esattamente* come il Teorema di Perron - ver. 1, utilizzando il (PMD)-2a forma (al posto del principio di massimo per funzioni  $v \in C^2$  con  $\Delta v \geq 0$ ).

## Il Teorema di Perron

### Alcune proprietà di $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$ - cont.

(2) Poiché ogni  $v \in \underline{\mathcal{L}}(\varphi)$  soddisfa  $v \leq \varphi$  in  $\partial\Omega$ , si ha

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

(3) Nonostante, in generale,  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \leq \mathcal{P}_\varphi^\Omega$ , anche per questa “nuova” funzione vale il Teorema di Perron - ver. 1: più precisamente, **se** esiste la soluzione  $u$  del problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$ , allora

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega = u.$$

Tale fatto può essere dimostrato *esattamente* come il Teorema di Perron - ver. 1, utilizzando il **(PMD)-2a forma** (al posto del principio di massimo per funzioni  $v \in C^2$  con  $\Delta v \geq 0$ ).

## Il Teorema di Perron

Siamo finalmente pronti per enunciare il “vero” teorema di Perron.

### Teorema (di Perron, ver. 2, 1915)

La funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è armonica in  $\Omega$ .

## Il Teorema di Perron

Siamo finalmente pronti per enunciare il “vero” teorema di Perron.

### Teorema (di Perron, ver. 2, 1915)

La funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è **armonica** in  $\Omega$ .

# Il problema dei dati al bordo

## Il problema dei dati al bordo

Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto **limitato** e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Grazie al Teorema di Perron - ver. 2, sappiamo che la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  (che è l'**unica candidata soluzione** del problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$ ) è **armonica in  $\Omega$** . Per mostrare che essa **risolve** davvero il problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$  dobbiamo provare che

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega \in C(\bar{\Omega}) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

(per ora sappiamo solo che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \leq \varphi$  in  $\partial\Omega$ ), ossia che

$$\exists \lim_{y \rightarrow x} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(y) = \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Questo, però, in generale è **falso!**

## Il problema dei dati al bordo

Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto **limitato** e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Grazie al Teorema di Perron - ver. 2, sappiamo che la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  (che è **l'unica candidata soluzione** del problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$ ) è **armonica in  $\Omega$** .

Per mostrare che essa **risolve** davvero il problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$  dobbiamo provare che

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega \in C(\bar{\Omega}) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

(per ora sappiamo solo che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \leq \varphi$  in  $\partial\Omega$ ), ossia che

$$\exists \lim_{y \rightarrow x} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(y) = \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Questo, però, in generale è **falso!**

## Il problema dei dati al bordo

Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto **limitato** e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Grazie al Teorema di Perron - ver. 2, sappiamo che la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  (che è l'**unica candidata soluzione** del problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$ ) è **armonica in  $\Omega$** . Per mostrare che essa **risolve** davvero il problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$  dobbiamo provare che

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega \in C(\bar{\Omega}) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

(per ora sappiamo solo che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \leq \varphi$  in  $\partial\Omega$ ), ossia che

$$\exists \lim_{y \rightarrow x} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(y) = \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Questo, però, in generale è **falso!**

## Il problema dei dati al bordo

Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto **limitato** e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Grazie al Teorema di Perron - ver. 2, sappiamo che la funzione  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  (che è l'**unica candidata soluzione** del problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$ ) è **armonica in  $\Omega$** . Per mostrare che essa **risolve** davvero il problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$  dobbiamo provare che

$$\mathcal{P}_\varphi^\Omega \in C(\bar{\Omega}) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

(per ora sappiamo solo che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \leq \varphi$  in  $\partial\Omega$ ), ossia che

$$\exists \lim_{y \rightarrow x} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(y) = \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Questo, però, in generale è **falso**!

# 1) L'esempio di Zaremba

## L'esempio di Zaremba

Per convincerci di ciò, presentiamo il seguente esempio.

### La palla bucata (Stanislaw Zaremba, 1911)

Sia  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), e sia

$$\varphi : \partial\Omega = \partial B_1(0) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| = 1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Poiché  $x_0 = 0$  è un **punto isolato** di  $\partial\Omega$ , la funzione  $\varphi$  risulta **continua** in  $\Omega$ ; di conseguenza, il Teorema di Perron - ver. 2 assicura che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è armonica in  $\Omega$ .

D'altra parte, non è difficile riconoscere che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \equiv 0$  in  $\Omega$ , e dunque

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(y) = 0 \neq 1 = \varphi(0).$$

Ciò mostra che  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **non ha soluzione!**

## L'esempio di Zaremba

Per convincerci di ciò, presentiamo il seguente esempio.

### La palla bucata (Stanislaw Zaremba, 1911)

Sia  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), e sia

$$\varphi : \partial\Omega = \partial B_1(0) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| = 1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Poiché  $x_0 = 0$  è un **punto isolato** di  $\partial\Omega$ , la funzione  $\varphi$  risulta **continua** in  $\Omega$ ; di conseguenza, il Teorema di Perron - ver. 2 assicura che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è armonica in  $\Omega$ .

D'altra parte, non è difficile riconoscere che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \equiv 0$  in  $\Omega$ , e dunque

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(y) = 0 \neq 1 = \varphi(0).$$

Ciò mostra che  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **non ha soluzione!**

## L'esempio di Zaremba

Per convincerci di ciò, presentiamo il seguente esempio.

### La palla bucata (Stanislaw Zaremba, 1911)

Sia  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), e sia

$$\varphi : \partial\Omega = \partial B_1(0) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| = 1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Poiché  $x_0 = 0$  è un **punto isolato** di  $\partial\Omega$ , la funzione  $\varphi$  risulta **continua** in  $\Omega$ ; di conseguenza, il Teorema di Perron - ver. 2 assicura che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è armonica in  $\Omega$ .

D'altra parte, non è difficile riconoscere che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \equiv 0$  in  $\Omega$ , e dunque

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(y) = 0 \neq 1 = \varphi(0).$$

Ciò mostra che  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **non ha soluzione!**

## L'esempio di Zaremba

Per convincerci di ciò, presentiamo il seguente esempio.

### La palla bucata (Stanislaw Zaremba, 1911)

Sia  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), e sia

$$\varphi : \partial\Omega = \partial B_1(0) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| = 1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Poiché  $x_0 = 0$  è un **punto isolato** di  $\partial\Omega$ , la funzione  $\varphi$  risulta **continua** in  $\Omega$ ; di conseguenza, il Teorema di Perron - ver. 2 assicura che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è armonica in  $\Omega$ .

D'altra parte, non è difficile riconoscere che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \equiv 0$  in  $\Omega$ , e dunque

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(y) = 0 \neq 1 = \varphi(0).$$

Ciò mostra che  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **non ha soluzione!**

## L'esempio di Zaremba

Per convincerci di ciò, presentiamo il seguente esempio.

### La palla bucata (Stanislaw Zaremba, 1911)

Sia  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), e sia

$$\varphi : \partial\Omega = \partial B_1(0) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| = 1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Poiché  $x_0 = 0$  è un **punto isolato** di  $\partial\Omega$ , la funzione  $\varphi$  risulta **continua** in  $\Omega$ ; di conseguenza, il Teorema di Perron - ver. 2 assicura che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è armonica in  $\Omega$ .

D'altra parte, non è difficile riconoscere che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega \equiv 0$  in  $\Omega$ , e dunque

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(y) = 0 \neq 1 = \varphi(0).$$

Ciò mostra che  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **non ha soluzione!**

## L'esempio di Zaremba

### Dove sta il problema

L'esempio precedente mostra che il problema non è né l'equazione né il dato al bordo in sé, ma **la geometria del bordo** (che permette un dato "a tratti").

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Diamo allora la seguente definizione.

### Definizione (Punto regolare)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $x_0$  è (un punto) **regolare (per  $\Delta$ )** se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in C(\partial\Omega).$$

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Diamo allora la seguente definizione.

### Definizione (Punto regolare)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $x_0$  è (un punto) regolare (per  $\Delta$ ) se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in C(\partial\Omega).$$

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Diamo allora la seguente definizione.

### Definizione (Punto regolare)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $x_0$  è (un punto) **regolare (per  $\Delta$ )** se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in C(\partial\Omega).$$

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Diamo allora la seguente definizione.

### Definizione (Punto regolare)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $x_0$  è (un punto) **regolare (per  $\Delta$ )** se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) = \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in C(\partial\Omega).$$

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

### L'esempio di Zaremba rivisitato

Sia  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$  l'aperto considerato nell'esempio di Zaremba. Allora

$x_0 = 0 \in \partial\Omega$  non è un punto regolare.

Infatti, esiste almeno una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  per la quale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \neq \varphi(0)$$

(ad esempio, la funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  tale che  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi = 0$  su  $\partial B_1(0)$ ).

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

### L'esempio di Zaremba rivisitato

Sia  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$  l'aperto considerato nell'esempio di Zaremba. Allora

$x_0 = 0 \in \partial\Omega$  **non è** un punto regolare.

Infatti, esiste **almeno** una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  per la quale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \neq \varphi(0)$$

(ad esempio, la funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  tale che  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi = 0$  su  $\partial B_1(0)$ ).

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

### L'esempio di Zaremba rivisitato

Sia  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$  l'aperto considerato nell'esempio di Zaremba. Allora

$x_0 = 0 \in \partial\Omega$  non è un punto regolare.

Infatti, esiste almeno una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  per la quale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \neq \varphi(0)$$

(ad esempio, la funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  tale che  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi = 0$  su  $\partial B_1(0)$ ).

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

### L'esempio di Zaremba rivisitato

Sia  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$  l'aperto considerato nell'esempio di Zaremba. Allora

$x_0 = 0 \in \partial\Omega$  **non è** un punto regolare.

Infatti, esiste **almeno** una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  per la quale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{P}_\varphi^\Omega(x) \neq \varphi(0)$$

(ad esempio, la funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  tale che  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi = 0$  su  $\partial B_1(0)$ ).

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Dati un aperto limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , dalla definizione appena data segue che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è (l'unica!) soluzione del problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$  **se tutti i punti  $\xi \in \partial\Omega$  sono regolari**.

Diventa allora importante avere dei risultati che **garantiscono la regolarità** di un punto.

Un primo risultato, **puramente analitico**, in questa direzione è stato ottenuto da Georges Louis Bouligand (1926) tramite il concetto di **barriera**, che ora introduciamo.

### Definizione (Barriera)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $\mathcal{B}$  è una **barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$**  se esiste un opportuno  $\rho > 0$  tale che

- (1)  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\Omega \cap B_\rho(x_0))$ ;
- (2)  $\mathcal{B} < 0$  in  $\Omega \cap B_\rho(x_0)$ ;
- (3)  $\mathcal{B}(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Dati un aperto limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , dalla definizione appena data segue che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è (l'unica!) soluzione del problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$  **se tutti i punti  $\xi \in \partial\Omega$  sono regolari**.  
Diventa allora importante avere dei risultati che **garantiscono la regolarità** di un punto.

Un primo risultato, **puramente analitico**, in questa direzione è stato ottenuto da Georges Louis Bouligand (1926) tramite il concetto di **barriera**, che ora introduciamo.

### Definizione (Barriera)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $\mathcal{B}$  è una **barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$**  se esiste un opportuno  $\rho > 0$  tale che

- (1)  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\Omega \cap B_\rho(x_0))$ ;
- (2)  $\mathcal{B} < 0$  in  $\Omega \cap B_\rho(x_0)$ ;
- (3)  $\mathcal{B}(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Dati un aperto limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , dalla definizione appena data segue che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è (l'unica!) soluzione del problema  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **se tutti i punti  $\xi \in \partial\Omega$  sono regolari**.  
Diventa allora importante avere dei risultati che **garantiscono la regolarità** di un punto.

Un primo risultato, **puramente analitico**, in questa direzione è stato ottenuto da Georges Louis Bouligand (1926) tramite il concetto di **barriera**, che ora introduciamo.

### Definizione (Barriera)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $\mathcal{B}$  è una **barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$**  se esiste un opportuno  $\rho > 0$  tale che

- (1)  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\Omega \cap B_\rho(x_0))$ ;
- (2)  $\mathcal{B} < 0$  in  $\Omega \cap B_\rho(x_0)$ ;
- (3)  $\mathcal{B}(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Dati un aperto limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , dalla definizione appena data segue che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è (l'unica!) soluzione del problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$  **se tutti i punti  $\xi \in \partial\Omega$  sono regolari**.  
Diventa allora importante avere dei risultati che **garantiscono la regolarità** di un punto.

Un primo risultato, **puramente analitico**, in questa direzione è stato ottenuto da Georges Louis Bouligand (1926) tramite il concetto di **barriera**, che ora introduciamo.

### Definizione (Barriera)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $\mathcal{B}$  è una **barriera** (per  $\Omega$ ) in  $x_0$  se esiste un opportuno  $\rho > 0$  tale che

- (1)  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\Omega \cap B_\rho(x_0))$ ;
- (2)  $\mathcal{B} < 0$  in  $\Omega \cap B_\rho(x_0)$ ;
- (3)  $\mathcal{B}(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Dati un aperto limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , dalla definizione appena data segue che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è (l'unica!) soluzione del problema  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **se tutti i punti  $\xi \in \partial\Omega$  sono regolari**.  
Diventa allora importante avere dei risultati che **garantiscono la regolarità** di un punto.

Un primo risultato, **puramente analitico**, in questa direzione è stato ottenuto da Georges Louis Bouligand (1926) tramite il concetto di **barriera**, che ora introduciamo.

### Definizione (Barriera)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $\mathcal{B}$  è una **barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$**  se esiste un opportuno  $\rho > 0$  tale che

- (1)  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\Omega \cap B_\rho(x_0))$ ;
- (2)  $\mathcal{B} < 0$  in  $\Omega \cap B_\rho(x_0)$ ;
- (3)  $\mathcal{B}(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Dati un aperto limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , dalla definizione appena data segue che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è (l'unica!) soluzione del problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$  **se tutti i punti  $\xi \in \partial\Omega$  sono regolari**.  
Diventa allora importante avere dei risultati che **garantiscono la regolarità** di un punto.

Un primo risultato, **puramente analitico**, in questa direzione è stato ottenuto da Georges Louis Bouligand (1926) tramite il concetto di **barriera**, che ora introduciamo.

### Definizione (Barriera)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $\mathcal{B}$  è una **barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$**  se esiste un opportuno  $\rho > 0$  tale che

- (1)  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\Omega \cap B_\rho(x_0))$ ;
- (2)  $\mathcal{B} < 0$  in  $\Omega \cap B_\rho(x_0)$ ;
- (3)  $\mathcal{B}(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Dati un aperto limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , dalla definizione appena data segue che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è (l'unica!) soluzione del problema  $(D)_{\Omega, \varphi}$  **se tutti i punti  $\xi \in \partial\Omega$  sono regolari**.  
Diventa allora importante avere dei risultati che **garantiscono la regolarità** di un punto.

Un primo risultato, **puramente analitico**, in questa direzione è stato ottenuto da Georges Louis Bouligand (1926) tramite il concetto di **barriera**, che ora introduciamo.

### Definizione (Barriera)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $\mathcal{B}$  è una **barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$**  se esiste un opportuno  $\rho > 0$  tale che

- (1)  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\Omega \cap B_\rho(x_0))$ ;
- (2)  $\mathcal{B} < 0$  in  $\Omega \cap B_\rho(x_0)$ ;
- (3)  $\mathcal{B}(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Dati un aperto limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e una funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , dalla definizione appena data segue che  $\mathcal{P}_\varphi^\Omega$  è (l'unica!) soluzione del problema  $(D)_{\Omega,\varphi}$  **se tutti i punti  $\xi \in \partial\Omega$  sono regolari**.  
Diventa allora importante avere dei risultati che **garantiscono la regolarità** di un punto.

Un primo risultato, **puramente analitico**, in questa direzione è stato ottenuto da Georges Louis Bouligand (1926) tramite il concetto di **barriera**, che ora introduciamo.

### Definizione (Barriera)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Diciamo che  $\mathcal{B}$  è una **barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$**  se esiste un opportuno  $\rho > 0$  tale che

- (1)  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\Omega \cap B_\rho(x_0))$ ;
- (2)  $\mathcal{B} < 0$  in  $\Omega \cap B_\rho(x_0)$ ;
- (3)  $\mathcal{B}(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Grazie alla definizione di barriera, possiamo enunciare il Teorema di Bouligand.

### Teorema (di Bouligand, 1926)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Allora  $x_0$  è un punto regolare se e solo se esiste una barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$ .

### E' una risposta soddisfacente?

Nonostante tale risultato sia estremamente “elegante” da un punto di vista matematico (è una piena caratterizzazione della regolarità di un punto), a prima vista sembra solo “spostare il problema”: dalla regolarità di un punto all'esistenza di una barriera. In realtà, il problema dell'esistenza di una barriera è invece facilmente risolubile in molti casi significativi.

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Grazie alla definizione di barriera, possiamo enunciare il Teorema di Bouligand.

### Teorema (di Bouligand, 1926)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Allora  $x_0$  è un punto regolare se e solo se esiste una barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$ .

### E' una risposta soddisfacente?

Nonostante tale risultato sia estremamente “elegante” da un punto di vista matematico (è una piena caratterizzazione della regolarità di un punto), a prima vista sembra solo “spostare il problema”: dalla regolarità di un punto all'esistenza di una barriera. In realtà, il problema dell'esistenza di una barriera è invece facilmente risolubile in molti casi significativi.

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Grazie alla definizione di barriera, possiamo enunciare il Teorema di Bouligand.

### Teorema (di Bouligand, 1926)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Allora  $x_0$  è un punto regolare se e solo se esiste una barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$ .

### E' una risposta soddisfacente?

Nonostante tale risultato sia estremamente “elegante” da un punto di vista matematico (è una piena caratterizzazione della regolarità di un punto), a prima vista sembra solo “spostare il problema”: dalla regolarità di un punto all'esistenza di una barriera. In realtà, il problema dell'esistenza di una barriera è invece facilmente risolubile in molti casi significativi.

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Grazie alla definizione di barriera, possiamo enunciare il Teorema di Bouligand.

### Teorema (di Bouligand, 1926)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Allora  $x_0$  è un punto regolare **se e solo se** esiste una barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$ .

### E' una risposta soddisfacente?

Nonostante tale risultato sia estremamente “elegante” da un punto di vista matematico (è una **piena caratterizzazione** della regolarità di un punto), a prima vista sembra solo “spostare il problema”: dalla regolarità di un punto all'esistenza di una barriera. In realtà, il problema dell'esistenza di una barriera è invece **facilmente risolubile in molti casi significativi**.

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Grazie alla definizione di barriera, possiamo enunciare il Teorema di Bouligand.

### Teorema (di Bouligand, 1926)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Allora  $x_0$  è un punto regolare **se e solo se** esiste una barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$ .

### E' una risposta soddisfacente?

Nonostante tale risultato sia estremamente “elegante” da un punto di vista matematico (è una **piena caratterizzazione** della regolarità di un punto), a prima vista sembra solo “spostare il problema”: dalla regolarità di un punto all'esistenza di una barriera. In realtà, il problema dell'esistenza di una barriera è invece **facilmente risolubile in molti casi significativi**.

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

### Teorema (Esistenza di una barriera)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Supponiamo esista un cono  $\mathcal{C}$  con vertice in  $x_0$  tale che  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$  (condizione del cono esterno). Allora esiste una barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

### Teorema (Esistenza di una barriera)

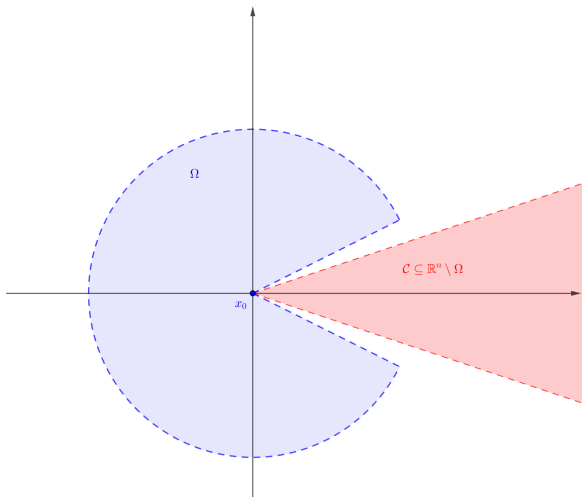
Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Supponiamo esista un cono  $\mathcal{C}$  con vertice in  $x_0$  tale che  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$  (condizione del cono esterno). Allora esiste una barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

### Teorema (Esistenza di una barriera)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, e sia  $x_0 \in \partial\Omega$ . Supponiamo esista un cono  $\mathcal{C}$  con vertice in  $x_0$  tale che  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$  (condizione del cono esterno). Allora esiste una barriera (per  $\Omega$ ) in  $x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità



## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Combinando il teorema precedente e il Teorema di Bouligand, otteniamo il seguente risultato.

### Corollario

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con bordo  $\partial\Omega$  lipschitziano. Allora, per ogni  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , il problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$  ha un'unica soluzione (data da  $\mathcal{P}_{\varphi}^{\Omega}$ ).

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Combinando il teorema precedente e il Teorema di Bouligand, otteniamo il seguente risultato.

### Corollario

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con bordo  $\partial\Omega$  lipschitziano. Allora, per ogni  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , il problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$  ha un'unica soluzione (data da  $\mathcal{P}_{\varphi}^{\Omega}$ ).

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Combinando il teorema precedente e il Teorema di Bouligand, otteniamo il seguente risultato.

### Corollario

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con bordo  $\partial\Omega$  lipschitziano. Allora, per ogni  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , il problema di Dirichlet  $(D)_{\Omega, \varphi}$  ha un'unica soluzione (data da  $\mathcal{P}_{\varphi}^{\Omega}$ ).

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Nonostante la nozione di barriera sia **puramente analitica**, la **condizione del cono esterno** (che ne garantisce l'esistenza) è invece **di tipo geometrico**; non è quindi sorprendente che sia possibile ottenere caratterizzazioni **puramente geometriche** della nozione di regolarità di un punto.

La più famosa di queste caratterizzazioni è dovuta a Norbert Wiener (1924-1925), e lega la regolarità di un punto  $x_0 \in \partial\Omega$  (con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto limitato) alla **sottigliezza di  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  in  $x_0$** :

$x_0$  è regolare **se e solo se**  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  **non** è “troppo sottile” in  $x_0$ .

### Wiener e Bouligand sono “coerenti”

Osserviamo che la **condizione del cono esterno** (sufficiente per l'esistenza di una barriera in  $x_0$ , e dunque per la regolarità di  $x_0$ ) **va proprio in questa direzione**: se  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  contiene un cono con vertice in  $x_0$ , sicuramente  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  non è “troppo sottile” in  $x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Nonostante la nozione di barriera sia **puramente analitica**, la **condizione del cono esterno** (che ne garantisce l'esistenza) è invece **di tipo geometrico**; non è quindi sorprendente che sia possibile ottenere caratterizzazioni **puramente geometriche** della nozione di regolarità di un punto.

La più famosa di queste caratterizzazioni è dovuta a Norbert Wiener (1924-1925), e lega la regolarità di un punto  $x_0 \in \partial\Omega$  (con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto limitato) alla **sottigliezza di  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  in  $x_0$** :

$x_0$  è regolare **se e solo se**  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  **non** è “troppo sottile” in  $x_0$ .

### Wiener e Bouligand sono “coerenti”

Osserviamo che la **condizione del cono esterno** (sufficiente per l'esistenza di una barriera in  $x_0$ , e dunque per la regolarità di  $x_0$ ) **va proprio in questa direzione**: se  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  contiene un cono con vertice in  $x_0$ , sicuramente  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  non è “troppo sottile” in  $x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Nonostante la nozione di barriera sia **puramente analitica**, la **condizione del cono esterno** (che ne garantisce l'esistenza) è invece **di tipo geometrico**; non è quindi sorprendente che sia possibile ottenere caratterizzazioni **puramente geometriche** della nozione di regolarità di un punto.

La più famosa di queste caratterizzazioni è dovuta a Norbert Wiener (1924-1925), e lega la regolarità di un punto  $x_0 \in \partial\Omega$  (con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto limitato) alla **sottigliezza di  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  in  $x_0$** :

$x_0$  è regolare **se e solo se**  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  non è "troppo sottile" in  $x_0$ .

### Wiener e Bouligand sono "coerenti"

Osserviamo che la **condizione del cono esterno** (sufficiente per l'esistenza di una barriera in  $x_0$ , e dunque per la regolarità di  $x_0$ ) **va proprio in questa direzione**: se  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  contiene un cono con vertice in  $x_0$ , sicuramente  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  non è "troppo sottile" in  $x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Nonostante la nozione di barriera sia **puramente analitica**, la **condizione del cono esterno** (che ne garantisce l'esistenza) è invece **di tipo geometrico**; non è quindi sorprendente che sia possibile ottenere caratterizzazioni **puramente geometriche** della nozione di regolarità di un punto.

La più famosa di queste caratterizzazioni è dovuta a Norbert Wiener (1924-1925), e lega la regolarità di un punto  $x_0 \in \partial\Omega$  (con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto limitato) alla **sottigliezza di  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  in  $x_0$** :

$x_0$  è regolare **se e solo se**  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  **non** è “troppo sottile” in  $x_0$ .

### Wiener e Bouligand sono “coerenti”

Osserviamo che la **condizione del cono esterno** (sufficiente per l'esistenza di una barriera in  $x_0$ , e dunque per la regolarità di  $x_0$ ) **va proprio in questa direzione**: se  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  contiene un cono con vertice in  $x_0$ , sicuramente  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  non è “troppo sottile” in  $x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Nonostante la nozione di barriera sia **puramente analitica**, la **condizione del cono esterno** (che ne garantisce l'esistenza) è invece **di tipo geometrico**; non è quindi sorprendente che sia possibile ottenere caratterizzazioni **puramente geometriche** della nozione di regolarità di un punto.

La più famosa di queste caratterizzazioni è dovuta a Norbert Wiener (1924-1925), e lega la regolarità di un punto  $x_0 \in \partial\Omega$  (con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto limitato) alla **sottigliezza di  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  in  $x_0$** :

$x_0$  è regolare **se e solo se**  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  **non** è “troppo sottile” in  $x_0$ .

### Wiener e Bouligand sono “coerenti”

Osserviamo che la **condizione del cono esterno** (sufficiente per l'esistenza di una barriera in  $x_0$ , e dunque per la regolarità di  $x_0$ ) **va proprio in questa direzione**: se  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  contiene un cono con vertice in  $x_0$ , sicuramente  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  non è “troppo sottile” in  $x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Nonostante la nozione di barriera sia **puramente analitica**, la **condizione del cono esterno** (che ne garantisce l'esistenza) è invece **di tipo geometrico**; non è quindi sorprendente che sia possibile ottenere caratterizzazioni **puramente geometriche** della nozione di regolarità di un punto.

La più famosa di queste caratterizzazioni è dovuta a Norbert Wiener (1924-1925), e lega la regolarità di un punto  $x_0 \in \partial\Omega$  (con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto limitato) alla **sottigliezza di  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  in  $x_0$** :

$x_0$  è regolare **se e solo se**  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  **non** è “troppo sottile” in  $x_0$ .

### Wiener e Bouligand sono “coerenti”

Osserviamo che la **condizione del cono esterno** (sufficiente per l'esistenza di una barriera in  $x_0$ , e dunque per la regolarità di  $x_0$ ) **va proprio in questa direzione**: se  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  contiene un cono con vertice in  $x_0$ , sicuramente  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  non è “troppo sottile” in  $x_0$ .

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Per capire e visualizzare cosa si intende con “troppo sottile”, consideriamo il seguente esempio, dovuto a Henri Lebesgue (1913).

### La spina di Lebesgue (1913)

Consideriamo l'insieme  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$  rappresentato in figura (spina di Lebesgue).

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

Per capire e visualizzare cosa si intende con “troppo sottile”, consideriamo il seguente esempio, dovuto a Henri Lebesgue (1913).

### La spina di Lebesgue (1913)

Consideriamo l'insieme  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$  rappresentato in figura (**spina di Lebesgue**).

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

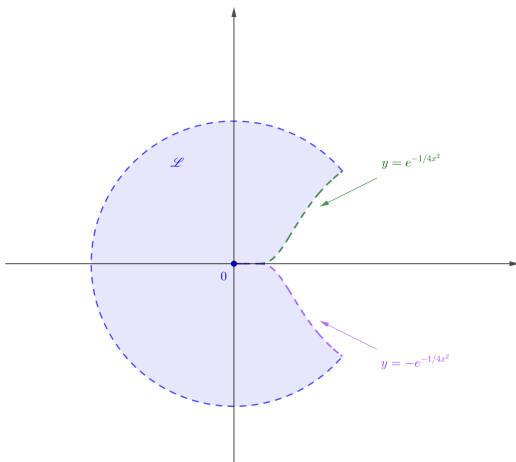


Figura: La spina di Lebesgue

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

### La spina di Lebesgue (1913) - cont.

Poiché la “cuspidè” in  $x_0 = 0$  è di tipo esponenziale (e non polinomiale), il dominio  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{L}$  è troppo sottile in  $x_0 = 0$ ; di conseguenza,  $x_0 = 0$  non è un punto regolare.

## Barriere e condizioni geometriche di risolubilità

### La spina di Lebesgue (1913) - cont.

Poiché la “cuspidè” in  $x_0 = 0$  è di tipo esponenziale (e non polinomiale), il dominio  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{L}$  è **troppo sottile** in  $x_0 = 0$ ; di conseguenza,  $x_0 = 0$  **non è un punto regolare**.

# Oltre l'operatore di Laplace

## Oltre l'operatore di Laplace

Tenuto conto di **tutto quanto** discusso finora, da buoni matematici ci poniamo una domanda: quanto il **metodo di Perron** (definizione di funzione subarmonica + teorema di Perron + regolarità dei punti di bordo) dipende **realmente** dall'operatore di Laplace  $\mathcal{L} = \Delta$ ?

In effetti, una volta chiamate **armoniche** le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  tali che  $\Delta u = 0$ , le "uniche" proprietà su cui si basa tale metodo sono le seguenti.

- (1) L'armonicità è una proprietà locale;
- (2) l'armonicità si preserva al limite (almeno per successioni monotone);
- (3) per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  esiste una famiglia di intorni limitati di  $x_0$ , diciamo  $\mathcal{V} = \{V_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ , con la seguente proprietà: per ogni  $f \in C(\partial V_a)$  **esiste un'unica funzione**  $u : \overline{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$u \text{ è armonica in } V_a \quad \text{e} \quad u = f \text{ in } \partial V_a$$

(cioè il problema  $(D)_{V_a, f}$  ha un'unica soluzione per ogni dato  $f$ ). Inoltre,

$$f \geq 0 \text{ in } \partial V_a \implies u \geq 0 \text{ in } V_a.$$

## Oltre l'operatore di Laplace

Tenuto conto di **tutto quanto** discusso finora, da buoni matematici ci poniamo una domanda: quanto il **metodo di Perron** (definizione di funzione subarmonica + teorema di Perron + regolarità dei punti di bordo) dipende **realmente** dall'operatore di Laplace  $\mathcal{L} = \Delta$ ?

In effetti, una volta chiamate **armoniche** le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  tali che  $\Delta u = 0$ , le "uniche" proprietà su cui si basa tale metodo sono le seguenti.

- (1) L'armonicità è una proprietà locale;
- (2) l'armonicità si preserva al limite (almeno per successioni monotone);
- (3) per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  esiste una famiglia di intorni limitati di  $x_0$ , diciamo  $\mathcal{V} = \{V_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ , con la seguente proprietà: per ogni  $f \in C(\partial V_a)$  **esiste un'unica funzione**  $u : \overline{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$u \text{ è armonica in } V_a \quad \text{e} \quad u = f \text{ in } \partial V_a$$

(cioè il problema  $(D)_{V_a, f}$  ha un'unica soluzione per ogni dato  $f$ ). Inoltre,

$$f \geq 0 \text{ in } \partial V_a \implies u \geq 0 \text{ in } V_a.$$

## Oltre l'operatore di Laplace

Tenuto conto di **tutto quanto** discusso finora, da buoni matematici ci poniamo una domanda: quanto il **metodo di Perron** (definizione di funzione subarmonica + teorema di Perron + regolarità dei punti di bordo) dipende **realmente** dall'operatore di Laplace  $\mathcal{L} = \Delta$ ?

In effetti, una volta chiamate **armoniche** le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  tali che  $\Delta u = 0$ , le "uniche" proprietà su cui si basa tale metodo sono le seguenti.

- (1) L'armonicità è una proprietà locale;
- (2) l'armonicità si preserva al limite (almeno per successioni monotone);
- (3) per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  esiste una famiglia di intorni limitati di  $x_0$ , diciamo  $\mathcal{V} = \{V_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ , con la seguente proprietà: per ogni  $f \in C(\partial V_a)$  esiste un'unica funzione  $u : \overline{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$u \text{ è armonica in } V_a \quad \text{e} \quad u = f \text{ in } \partial V_a$$

(cioè il problema  $(D)_{V_a, f}$  ha un'unica soluzione per ogni dato  $f$ ). Inoltre,

$$f \geq 0 \text{ in } \partial V_a \implies u \geq 0 \text{ in } V_a.$$

## Oltre l'operatore di Laplace

Tenuto conto di **tutto quanto** discusso finora, da buoni matematici ci poniamo una domanda: quanto il **metodo di Perron** (definizione di funzione subarmonica + teorema di Perron + regolarità dei punti di bordo) dipende **realmente** dall'operatore di Laplace  $\mathcal{L} = \Delta$ ?

In effetti, una volta chiamate **armoniche** le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  tali che  $\Delta u = 0$ , le "uniche" proprietà su cui si basa tale metodo sono le seguenti.

- (1) L'armonicità è una proprietà locale;
- (2) l'armonicità si preserva al limite (almeno per successioni monotone);
- (3) per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  esiste una famiglia di intorni limitati di  $x_0$ , diciamo  $\mathcal{V} = \{V_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ , con la seguente proprietà: per ogni  $f \in C(\partial V_a)$  esiste un'unica funzione  $u : \overline{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$u \text{ è armonica in } V_a \quad \text{e} \quad u = f \text{ in } \partial V_a$$

(cioè il problema  $(D)_{V_a, f}$  ha un'unica soluzione per ogni dato  $f$ ). Inoltre,

$$f \geq 0 \text{ in } \partial V_a \implies u \geq 0 \text{ in } V_a.$$

## Oltre l'operatore di Laplace

Tenuto conto di **tutto quanto** discusso finora, da buoni matematici ci poniamo una domanda: quanto il **metodo di Perron** (definizione di funzione subarmonica + teorema di Perron + regolarità dei punti di bordo) dipende **realmente** dall'operatore di Laplace  $\mathcal{L} = \Delta$ ?

In effetti, una volta chiamate **armoniche** le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  tali che  $\Delta u = 0$ , le "uniche" proprietà su cui si basa tale metodo sono le seguenti.

- (1) L'armonicità è una proprietà locale;
- (2) l'armonicità si preserva al limite (almeno per successioni monotone);
- (3) per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  esiste una famiglia di intorni limitati di  $x_0$ , diciamo  $\mathcal{V} = \{V_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ , con la seguente proprietà: per ogni  $f \in C(\partial V_a)$  esiste un'unica funzione  $u : \overline{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$u \text{ è armonica in } V_a \quad \text{e} \quad u = f \text{ in } \partial V_a$$

(cioè il problema  $(D)_{V_a, f}$  ha un'unica soluzione per ogni dato  $f$ ). Inoltre,

$$f \geq 0 \text{ in } \partial V_a \implies u \geq 0 \text{ in } V_a.$$

## Oltre l'operatore di Laplace

Tenuto conto di **tutto quanto** discusso finora, da buoni matematici ci poniamo una domanda: quanto il **metodo di Perron** (definizione di funzione subarmonica + teorema di Perron + regolarità dei punti di bordo) dipende **realmente** dall'operatore di Laplace  $\mathcal{L} = \Delta$ ?

In effetti, una volta chiamate **armoniche** le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  tali che  $\Delta u = 0$ , le "uniche" proprietà su cui si basa tale metodo sono le seguenti.

- (1) L'armonicità è una proprietà locale;
- (2) l'armonicità si preserva al limite (almeno per successioni monotone);
- (3) per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  esiste una famiglia di intorni limitati di  $x_0$ , diciamo  $\mathcal{V} = \{V_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ , con la seguente proprietà: per ogni  $f \in C(\partial V_a)$  **esiste un'unica funzione**  $u : \overline{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$u \text{ è armonica in } V_a \quad \text{e} \quad u = f \text{ in } \partial V_a$$

(cioè il problema  $(D)_{V_a, f}$  ha un'unica soluzione per ogni dato  $f$ ). Inoltre,

$$f \geq 0 \text{ in } \partial V_a \implies u \geq 0 \text{ in } V_a.$$

## Oltre l'operatore di Laplace

Tenuto conto di **tutto quanto** discusso finora, da buoni matematici ci poniamo una domanda: quanto il **metodo di Perron** (definizione di funzione subarmonica + teorema di Perron + regolarità dei punti di bordo) dipende **realmente** dall'operatore di Laplace  $\mathcal{L} = \Delta$ ?

In effetti, una volta chiamate **armoniche** le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  tali che  $\Delta u = 0$ , le "uniche" proprietà su cui si basa tale metodo sono le seguenti.

- (1) L'armonicità è una proprietà locale;
- (2) l'armonicità si preserva al limite (almeno per successioni monotone);
- (3) per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  esiste una famiglia di intorni limitati di  $x_0$ , diciamo  $\mathcal{V} = \{V_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ , con la seguente proprietà: per ogni  $f \in C(\partial V_a)$  **esiste un'unica funzione**  $u : \overline{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$u \text{ è armonica in } V_a \quad \text{e} \quad u = f \text{ in } \partial V_a$$

(cioè il problema  $(D)_{V_a, f}$  ha un'unica soluzione per ogni dato  $f$ ). Inoltre,

$$f \geq 0 \text{ in } \partial V_a \implies u \geq 0 \text{ in } V_a.$$

## Oltre l'operatore di Laplace

Queste tre proprietà sono verificate **anche per operatori  $\mathcal{L}$  diversi dal laplaciano**, a patto di chiamare ( **$\mathcal{L}$ -**) **armoniche** le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  tali che  $\mathcal{L}u = 0$ .

Alcuni esempi di operatori  $\mathcal{L}$  "ammissibili" sono i seguenti.

(1) Generici operatori **uniformemente ellittici** del second'ordine, della forma

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \partial_{x_i x_j}^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_{x_i} + c(x) \quad \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$$

dove  $a_{i,j}(\cdot)$ ,  $b_i(\cdot)$ ,  $c(\cdot) \in C^\infty(\Omega)$  e

- a) la matrice  $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j}$  è simmetrica e definita positiva per ogni  $x$ ;
- b)  $c \leq 0$  in  $\Omega$ .

(2) L'operatore del calore  $\mathcal{L} = \Delta - \partial_t$  in  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t$ .

## Oltre l'operatore di Laplace

Queste tre proprietà sono verificate **anche per operatori  $\mathcal{L}$  diversi dal laplaciano**, a patto di chiamare ( $\mathcal{L}$ -) **armoniche** le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  tali che  $\mathcal{L}u = 0$ .

Alcuni esempi di operatori  $\mathcal{L}$  "ammissibili" sono i seguenti.

(1) Generici operatori **uniformemente ellittici** del second'ordine, della forma

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \partial_{x_i x_j}^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_{x_i} + c(x) \quad \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$$

dove  $a_{i,j}(\cdot)$ ,  $b_i(\cdot)$ ,  $c(\cdot) \in C^\infty(\Omega)$  e

- a) la matrice  $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j}$  è simmetrica e definita positiva per ogni  $x$ ;
- b)  $c \leq 0$  in  $\Omega$ .

(2) L'operatore del calore  $\mathcal{L} = \Delta - \partial_t$  in  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t$ .

## Oltre l'operatore di Laplace

Queste tre proprietà sono verificate **anche per operatori  $\mathcal{L}$  diversi dal laplaciano**, a patto di chiamare ( $\mathcal{L}$ -) **armoniche** le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  tali che  $\mathcal{L}u = 0$ .

Alcuni esempi di operatori  $\mathcal{L}$  "ammissibili" sono i seguenti.

(1) Generici operatori **uniformemente ellittici** del second'ordine, della forma

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \partial_{x_i x_j}^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_{x_i} + c(x) \quad \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$$

dove  $a_{i,j}(\cdot)$ ,  $b_i(\cdot)$ ,  $c(\cdot) \in C^\infty(\Omega)$  e

- a) la matrice  $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j}$  è simmetrica e definita positiva per ogni  $x$ ;
- b)  $c \leq 0$  in  $\Omega$ .

(2) L'operatore del calore  $\mathcal{L} = \Delta - \partial_t$  in  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t$ .

## Oltre l'operatore di Laplace

Queste tre proprietà sono verificate **anche per operatori  $\mathcal{L}$  diversi dal laplaciano**, a patto di chiamare ( $\mathcal{L}$ -) **armoniche** le funzioni  $u$  di classe  $C^2$  tali che  $\mathcal{L}u = 0$ .

Alcuni esempi di operatori  $\mathcal{L}$  "ammissibili" sono i seguenti.

- (1) Generici operatori **uniformemente ellittici** del second'ordine, della forma

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \partial_{x_i x_j}^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_{x_i} + c(x) \quad \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$$

dove  $a_{i,j}(\cdot)$ ,  $b_i(\cdot)$ ,  $c(\cdot) \in C^\infty(\Omega)$  e

- a) la matrice  $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j}$  è simmetrica e definita positiva per ogni  $x$ ;
- b)  $c \leq 0$  in  $\Omega$ .

- (2) L'operatore del calore  $\mathcal{L} = \Delta - \partial_t$  in  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ .

### Oltre l'operatore di Laplace

(3) Alcuni operatori **ellittico-degeneri**, ad esempio

$$\text{a) } \mathcal{L} = \partial_x^2 + x^2 \partial_y^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^2;$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{L} &= (\partial_x + 2y\partial_t)^2 + (\partial_y - 2x\partial_t)^2 \\ &= \partial_x^2 + \partial_y^2 + 4(x^2 + y^2)\partial_t^2 + 4(y\partial_{xt}^2 - x\partial_{yt}^2) \quad \text{in } \mathbb{R}^3; \end{aligned}$$

$$\text{c) } \mathcal{L} = \partial_v^2 + v\partial_x - \partial_t \quad \text{in } \mathbb{R}^3;$$

⋮

Tali operatori hanno diverse applicazioni (geometria differenziale, probabilità, finanza, ecc.), e saranno oggetto del corso di dottorato che terremo io e M. Bramanti ad inizio Giugno.

## Oltre l'operatore di Laplace

(3) Alcuni operatori **ellittico-degeneri**, ad esempio

$$\text{a) } \mathcal{L} = \partial_x^2 + x^2 \partial_y^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^2;$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{L} &= (\partial_x + 2y\partial_t)^2 + (\partial_y - 2x\partial_t)^2 \\ &= \partial_x^2 + \partial_y^2 + 4(x^2 + y^2)\partial_t^2 + 4(y\partial_{xt}^2 - x\partial_{yt}^2) \quad \text{in } \mathbb{R}^3; \end{aligned}$$

$$\text{c) } \mathcal{L} = \partial_v^2 + v\partial_x - \partial_t \quad \text{in } \mathbb{R}^3;$$

⋮

Tali operatori hanno diverse applicazioni (geometria differenziale, probabilità, finanza, ecc.), e saranno oggetto del corso di dottorato che terremo io e M. Bramanti ad inizio Giugno.