Equazioni ellittiche e paraboliche di tipo degenere o singolare

Fabio Punzo

27/3/2025

Seminario per il corso di EDP (del prof. M. Bramanti)

Tratteremo

(E) $$\frac{1}{\rho(x)}\Delta u - u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

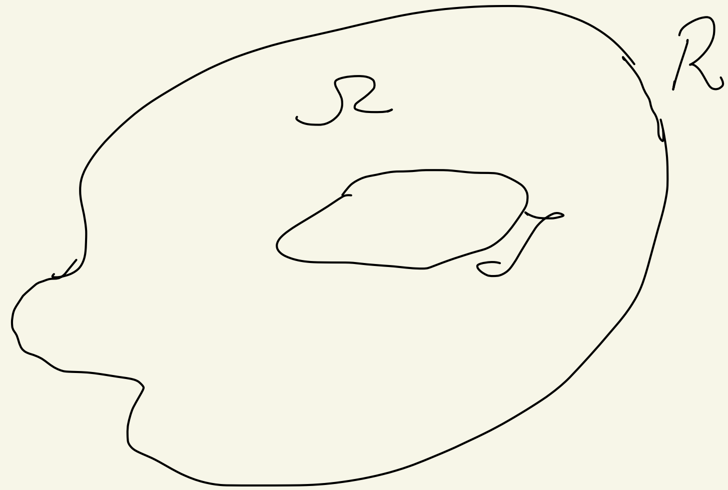
(P) $$\begin{cases} \partial_t u - \dfrac{1}{\rho(x)}\Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

Equazione ellittica

$\frac{1}{\rho}\Delta u - u = 0$

$\partial\Omega = R \cup S$ bordo regolare, bordo singolare; $\partial\Omega$ C^2

$\bar{R} \cap \bar{S} = \emptyset$



$$\boxed{\mathcal{L}u := \frac{1}{\rho}\Delta u}$$

$\rho \in C(\Omega \cup R)$, $\rho > 0$ in $\Omega \cup R$.

Può accadere che

$\rho(x) \xrightarrow[\mathrm{dist}(x,S)\to 0]{} 0$ o $\rho(x) \xrightarrow[\mathrm{dist}(x,S)\to 0]{} +\infty$

L'operatore $\mathcal{L}$ è ellittico

$$\frac{1}{\rho(x)} \langle \xi, \xi \rangle > 0 \qquad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Se $D \overset{\swarrow \text{aperto}}{} \subset \Omega \cup R$, allora

$$\underbrace{\frac{1}{\sup_D \rho}}_{=: \lambda} \|\xi\|^2 \leq \frac{1}{\rho(x)} \langle \xi, \xi \rangle \leq \underbrace{\frac{1}{\inf_D \rho}}_{=: \Lambda} \|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Dunque $\mathcal{L}$ è uniformemente ellittico in D.

Che succede se $\overline{D} \subset \Omega \cup R \cup \Sigma$?

$$d(x) := \text{dist}(x, \Sigma) \qquad (x \in \overline{\Omega})$$

Può accadere che

$$\frac{1}{\rho(x)} \langle \xi, \xi \rangle \xrightarrow[d(x)\to 0]{} 0 \,,$$ $\mathcal{L}$ è degenere

$$\frac{1}{\rho(x)} \langle \xi, \xi \rangle \xrightarrow[d(x)\to 0]{} +\infty$$ $\mathcal{L}$ è singolare

Esempio notevole

$$\rho(x) := c_0 \, d(x)^{\alpha} \qquad \begin{matrix}(\alpha \in \mathbb{R}) \\ c_0 > 0\end{matrix}$$

$\mathcal{L}$ è degenere se $\alpha < 0$

$\mathcal{L}$ è singolare se $\alpha > 0$

$\mathcal{L}$ è unif. ellittico se $\alpha = 0$.

Problema di Dirichlet

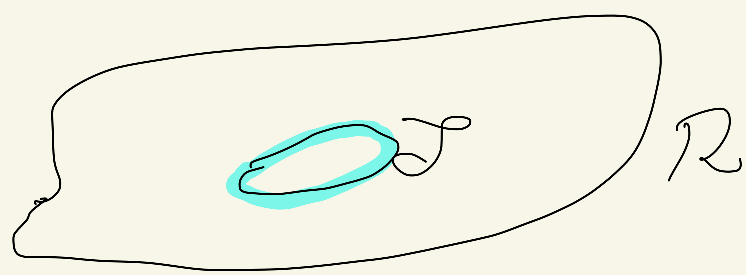
no

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho(x)} \Delta u - u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(D) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho(x)} \Delta u - u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } R, \end{cases}$$

$g \in C(R)$.

Il dato non è prescritto su γ



Il problema è ben posto?

$$\begin{cases} - \text{esistenza} \\ - \text{unicità} \end{cases}$$ ✓ $\boxed{\text{dipende da } \rho(x)}$

Esistenza

<u>Thm</u> Se $\rho \in C^{\alpha}(\Omega \cup R)$, $\rho \geq 0$, allora $\exists$ sol. di (D).

Dim. (idea) $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ $\quad \overline{\Omega_j} \subset \Omega$

$$\Omega_j \subset \Omega_{j+1}, \quad \partial \Omega_j \; C^1, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega.$$

$$\boxed{\text{In } \Omega_j, \ \mathcal{L} \text{ è unif. ellittico}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\tilde{g} \in C(\overline{\Omega}), \\ \tilde{g}_{|R} = g\end{array}}$$

$$(D_j) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho(x)} \Delta u - u = 0 & \text{in } \Omega_j \\ u = \tilde{g} & \text{su } \partial\Omega_j \end{cases}$$

$\exists!$ sol. $\quad u_j \in C^{2,\alpha}(\Omega_j) \cap C(\overline{\Omega_j})$.

$$\overline{v} := \|\tilde{g}\|_\infty$$

è soprasol. di (D_j), mentre

$$\underline{v} := -\|\tilde{g}\|_\infty$$

è sottosol. di (D_j).

Per il principio di confronto

$$\underset{\sim}{v} \leq u_j \leq \overline{v} \quad \text{in } \Omega_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$|u_j| \leq \|g\|_\infty$$

Grazie a stime di regolarità ...

(e usando il thm di Ascoli-Arzelà e un argomento diagonale), si può inferire che

$\exists \{u_{j_k}\} \subset \{u_j\}$:

$$u_{j_k} \text{ converge in } C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$$

a una certa $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$.

Inoltre

$$\frac{1}{\rho(x)}\Delta u_j - u_j = 0 \quad \text{in } \Omega_j$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\rho(x)}\Delta u - u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Sfruttando il fatto che R è regolare, si vede poi che

$$u = g \quad \text{su } R.$$

$\square$

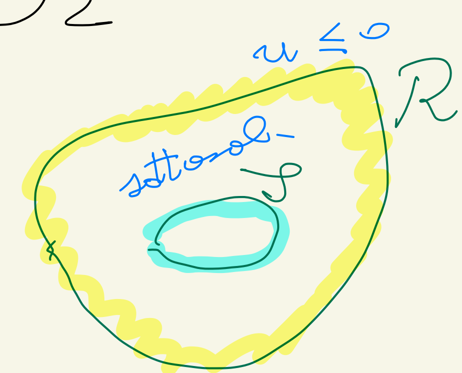
E su J? $\boxed{\text{dipende da } \rho(x)}$

Unicità

Thm (principio di Phragmén–Lindelöf)

Supp. che $\exists$ una soprasoluzione $Z(x)$ di

$$\Delta Z \le -f(x) \quad \text{in } \Omega$$



tale che

$$\inf_{\Omega} Z > 0,$$

$$\lim_{d(x,\Gamma)\to\infty} Z(x) = +\infty.$$

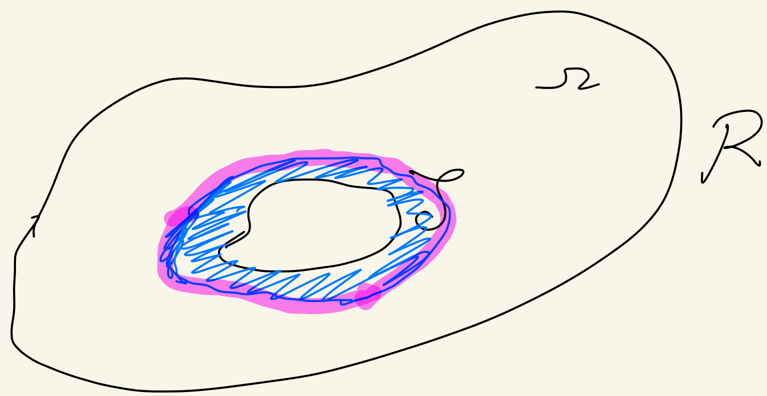
Sia u una sottosol. di (D) limitata. Allora

$$u \le 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Dim. Sia $\Gamma^\delta := \{ x \in \Omega : d(x) < \delta \}$

$\partial\Omega^\delta := \{ x \in \Omega : d(x) = \delta \}$ $(\delta > 0)$

$\Omega^\delta := \Omega \setminus \overline{\Gamma^\delta}$



u limitata, $\quad Z(x) \to +\infty \quad \Longrightarrow$
$\qquad d(x, \Gamma) \to 0$

$$\lim_{d(x,\Gamma) \to 0} \frac{u(x)}{Z(x)} = 0 .$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \underset{x \in \Omega}{d(x, \Gamma) \le \delta} \Rightarrow -\varepsilon < \frac{u(x)}{Z(x)} < \varepsilon .$$

$$Z > 0 \Rightarrow \qquad u(x) < \varepsilon Z(x) \quad \text{in } \Gamma^\delta .$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - u \ge 0 & \text{in } \Omega^\delta \\ u \le 0 & \text{su } R \\ u < \varepsilon Z & \text{su } \Gamma^\delta \end{cases} \qquad \partial\Omega^\delta = R \cup \Gamma^\delta$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\varepsilon Z) - \overbrace{\varepsilon Z}^{>0} \le \mathcal{L}(\varepsilon Z) \le -1 \cdot \varepsilon \le 0 & \text{in } \Omega^\delta \\ \varepsilon Z > 0 & \text{su } R \\ \varepsilon Z = \varepsilon Z & \text{su } \Gamma^\delta \end{cases}$$

Per il principio di confronto,

$$u \leq \varepsilon Z \quad \text{in } \Omega^\delta .$$

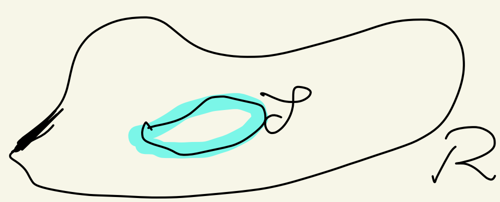
Per $\varepsilon \to 0^+$,

$$u \leq 0 \quad \text{in } \Omega .$$

$\square$

Ne segue

Thus Se esiste Z come sopra, allora esiste una e una sola sol. limitata di (D).



unicità senza condizioni su δ

Non-unicità

Thm Se $\exists$ soprasol. V di $(\delta > 0)$

$$\mathcal{L} V = -1 \text{ in } J^\delta$$

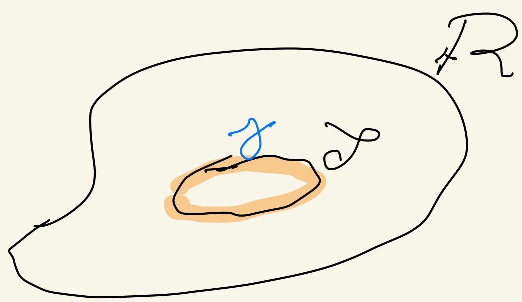
t.c.

$$V > 0 \text{ in } \overline{J^\delta} \setminus J \,,$$

$$V(x) \xrightarrow[d(x) \to 0]{} 0 \,,$$

allora $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ $\exists$ una sol. di (D) t.c.

$$u(x) \xrightarrow[d(x, J) \to 0]{} \gamma \,.$$



- - -

Cor. Non-unicità per (D).

Esempi

1

$$\rho(x) \geq c_0 \, d^{-\alpha}(x) \qquad \alpha \geq 2, \quad c_0 > 0$$

$\frac{1}{\rho(x)} \leq \frac{1}{c_0} d^{\alpha}(x)$

$\Downarrow$

$\mathcal{L}$ degenere

Si costruisce $Z(x)$ (soprasol. "molto debole"), dunque c'è unicità per (D).

2

$$\rho(x) \leq c_0 \, d^{-\alpha}(x) \qquad \alpha < 2, \quad c_0 > 0$$

$\frac{1}{\rho(x)} \geq \frac{1}{c_0} d^{\alpha}(x)$

$\Downarrow$

$\mathcal{L}$ degenere o singolare

Si costruisce $V(x)$, dunque c'è non-unicità per (D).

— . —

PROBLEMA PARABOLICO

$$(C) \quad \begin{cases} \partial_t u - \dfrac{1}{\rho(x)} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $T > 0$.

$\rho \in C(\mathbb{R}^n)$, $\rho > 0$ in $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{L}u := \dfrac{1}{\rho} \Delta u$ è ellittico

Può accadere che

$$\frac{1}{\rho(x)} \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0, \qquad \{ \rho(x) = (1+|x|)^\alpha \quad \alpha > 0 \}$$

o

$$\frac{1}{\rho(x)} \xrightarrow[|x| \to \infty]{} \infty. \qquad \{ \rho(x) = (1+|x|)^\alpha \quad \alpha < 0 \}$$

Il problema (C) è ben posto ?

$$\begin{cases} - \text{Esistenza} \quad \checkmark \\ - \text{Unicità} \quad \boxed{\text{dipende da } \rho(x)} \end{cases}$$

Esistenza

Thm $\exists$ sol. $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T])$; inoltre

$|u| \le \|u_0\|_\infty$ in $\mathbb{R}^n \times (0,T]$.

Unicità Supp. che $\exists$ una soprasol. Z di

$$\mathcal{L} Z = -1 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

t.c.

$$\inf_{\mathbb{R}^n} Z > 0,$$

$$Z(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} +\infty .$$

Allora $\exists!$ sol. limitata u di (C).

- Esempio $\quad \rho(x) \geq c_0 |x|^{-\alpha} \quad \alpha \leq 2$

$\frac{1}{\rho(x)} \leq \frac{1}{c_0}|x|^{\alpha}$
$\Downarrow$
$\mathcal{L}$ degenere o singolare

Non-unicità

Thm Se $\exists$ una soprasol. $V(x)$ di

$$\mathcal{L}V = -1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{R_0}},$$

per qualche $R_0 > 0$, t.c.

$$V > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus B_{R_0}$$

$$V(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0,$$

allora $\forall\, \gamma \in \mathbb{R}$ $\exists$ una sol. u di (C) t.c.

$\forall\, t \in (0,T]$, $\quad u(x,t) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \gamma$.

Cor. <u>Non-unicità</u> di sol. per (C)

• <u>Esempio</u> $\quad \rho(x) \le c_0 |x|^{-\alpha} \quad \boxed{\alpha > 2}$

$\frac{1}{\rho(x)} \ge \frac{1}{c_0} |x|^{\alpha}$

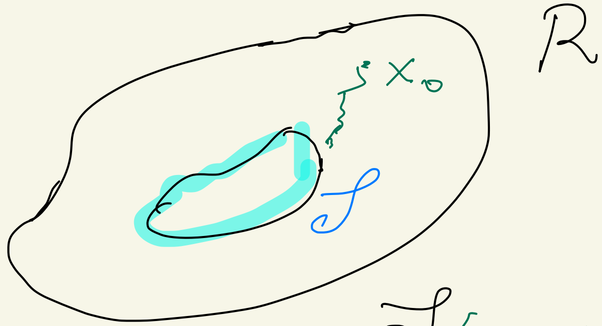
$\Downarrow$

$\mathcal{L}$ singolare

<u>Interpretazione probabilistica</u>

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\frac{1}{\rho(x)} \Delta \rightsquigarrow X_t$ processo stocastico



$\mathcal{Z} \rightsquigarrow$ unicità senza cond. su $\mathcal{J}$

$\leftrightsquigarrow X_t$ partendo da un $x_0 \in \Omega$ <u>non</u> raggiunge $\mathcal{J}$ in tempo finito

$\mathcal{V} \rightsquigarrow$ cond. su $\mathcal{J} \leftrightsquigarrow$ X_t arriva a $\mathcal{J}$

$\mathbb{R}^n$

X_t partendo da un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ non raggiunge l'∞

$\Updownarrow$

$\exists\ Z(x) \rightsquigarrow$ unicità

X_t partendo da $x_0 \in \mathbb{R}^n$ va all'∞ in tempo finito

$\Updownarrow$

$\exists\ V(x) \rightsquigarrow$ condiz. all'∞

$\Updownarrow$

non-unicità

Osservazione

Risultati simili valgono per

$$\frac{1}{\rho}\Delta u - u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{\rho}\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T] \\ u = g & \text{in } R \times (0,T] \\ u = u_0 & \text{in } \Omega \times \{0\} \end{cases}$$

Alcuni sviluppi (noti e in corso)

- Unicità in altre classi di soluzioni (con metodi analoghi o diversi basati sull'eq. aggiunta)

- $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow M$ varietà Riemanniana

  ($\rho(x)$ compete con la "curvatura")

- $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow G$ grafo (pb discreto)

  $\rho(x)$ compete con la struttura di G.

——————— . ———————