

Dall'equazione del calore all'equazione dei mezzi porosi: soluzioni fondamentali ed effetti regolarizzanti

MATTEO MURATORI



POLITECNICO
MILANO 1863

DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA

27 Marzo 2025

Seminario nell'ambito del corso "Metodi Analitici delle EDP"

L'equazione del calore: soluzione fondamentale

L'equazione del calore nell'intero spazio Euclideo \mathbb{R}^n è un'importante equazione parabolica di tipo diffusivo, avente forma

$$\partial_t u(x, t) = \Delta_x u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

L'equazione del calore: soluzione fondamentale

L'equazione del calore nell'intero spazio Euclideo \mathbb{R}^n è un'importante equazione parabolica di tipo diffusivo, avente forma

$$\partial_t u(x, t) = \Delta_x u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

Ricordando la definizione dell'operatore Laplaciano, possiamo riscrivere il membro destro come

$$\Delta u = \operatorname{div}(c \nabla u),$$

dove $c = 1$ può essere interpretato come coefficiente di diffusione.

L'equazione del calore: soluzione fondamentale

L'equazione del calore nell'intero spazio Euclideo \mathbb{R}^n è un'importante equazione parabolica di tipo diffusivo, avente forma

$$\partial_t u(x, t) = \Delta_x u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

Ricordando la definizione dell'operatore Laplaciano, possiamo riscrivere il membro destro come

$$\Delta u = \operatorname{div}(c \nabla u),$$

dove $c = 1$ può essere interpretato come coefficiente di diffusione.

In accordo con la legge di Fourier per la trasmissione del calore, dalla quale l'equazione viene ricavata a livello modellistico, tale coefficiente è costante (per semplicità lo poniamo uguale a 1).

In particolare, c non dipende da u , il che rende l'equazione lineare.

Trattandosi di un'equazione parabolica, per la sua buona positura ci aspettiamo di dover prescrivere un opportuno dato iniziale:

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Trattandosi di un'equazione parabolica, per la sua **buona positura** ci aspettiamo di dover prescrivere un opportuno **dato iniziale**:

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Scegliendo come u_0 la **delta di Dirac** centrata in un generico punto $y \in \mathbb{R}^n$, troviamo la **soluzione fondamentale** o **nucleo del calore**:

$$K(x, y, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}},$$

che non è altro che una funzione **Gaussiana** n -dimensionale di media y e varianza $\sqrt{2t}$.

Trattandosi di un'equazione parabolica, per la sua **buona positura** ci aspettiamo di dover prescrivere un opportuno **dato iniziale**:

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Scegliendo come u_0 la **delta di Dirac** centrata in un generico punto $y \in \mathbb{R}^n$, troviamo la **soluzione fondamentale** o **nucleo del calore**:

$$K(x, y, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}},$$

che non è altro che una funzione **Gaussiana** n -dimensionale di media y e varianza $\sqrt{2t}$.

Ricordiamo che il dato iniziale $K(x, y, 0) = \delta_y$ va inteso nel **senso delle distribuzioni**:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) \phi(x) dx = \phi(y) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

L'effetto regolarizzante $L^1 - L^\infty$

Grazie alla linearità dell'equazione, per un generico dato iniziale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ abbiamo a disposizione la **formula di rappresentazione** di Duhamel per la relativa soluzione u :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) u_0(y) dy .$$

L'effetto regolarizzante $L^1 - L^\infty$

Grazie alla linearità dell'equazione, per un generico dato iniziale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ abbiamo a disposizione la **formula di rappresentazione** di Duhamel per la relativa soluzione u :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) u_0(y) dy .$$

In particolare, osservando che il nucleo del calore soddisfa la stima

$$K(x, y, t) \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \quad \forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) ,$$

possiamo dedurre facilmente che

$$|u(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) |u_0(y)| dy \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)| dy .$$

L'effetto regolarizzante $L^1 - L^\infty$

Grazie alla linearità dell'equazione, per un generico dato iniziale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ abbiamo a disposizione la **formula di rappresentazione** di Duhamel per la relativa soluzione u :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) u_0(y) dy.$$

In particolare, osservando che il nucleo del calore soddisfa la stima

$$K(x, y, t) \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \quad \forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, +\infty),$$

possiamo dedurre facilmente che

$$|u(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) |u_0(y)| dy \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)| dy.$$

Otteniamo in questo modo il cosiddetto **effetto regolarizzante $L^1 - L^\infty$** :

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_n t^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall t > 0.$$

Diffusione non-lineare: l'equazione dei mezzi porosi

L'equazione del calore, tuttavia, presenta un “difetto” modellistico intrinseco: prevede che le soluzioni si propaghino con **velocità infinita**.

Ciò risulta ben evidente analizzando la soluzione fondamentale: per ogni fissato $y \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, abbiamo che $x \mapsto K(x, y, t)$ è **istantaneamente** una funzione **positiva** e $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, nonostante il suo dato iniziale sia una delta di Dirac!

Diffusione non-lineare: l'equazione dei mezzi porosi

L'equazione del calore, tuttavia, presenta un “difetto” modellistico intrinseco: prevede che le soluzioni si propaghino con **velocità infinita**.

Ciò risulta ben evidente analizzando la soluzione fondamentale: per ogni fissato $y \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, abbiamo che $x \mapsto K(x, y, t)$ è **istantaneamente** una funzione **positiva** e $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, nonostante il suo dato iniziale sia una delta di Dirac!

Per questo motivo, e non solo, sono stati proposti negli anni vari modelli alternativi di diffusione **non-lineare**. Oggi ci concentriamo sull'**equazione dei mezzi porosi**.

Il nome deriva dal fatto che venne originariamente ricavata per descrivere il flusso di un gas politropico in un mezzo poroso. Vediamo, in tale contesto, le considerazioni fisiche che portano all'equazione.

Pensando a $u(x, t) \geq 0$ come alla **densità** del gas che si sta diffondendo, scriviamo anzitutto la relativa **equazione di continuità**:

$$\varepsilon \partial_t u + \operatorname{div}_x(u \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

dove $\mathbf{V}(x, t)$ è la **velocità** del gas e $\varepsilon \in (0, 1)$ è la **porosità** del mezzo in cui avviene la diffusione. Osserviamo che, se \mathbf{V} fosse prescritta, la (1) sarebbe un'equazione di **puro trasporto**.

Pensando a $u(x, t) \geq 0$ come alla **densità** del gas che si sta diffondendo, scriviamo anzitutto la relativa **equazione di continuità**:

$$\varepsilon \partial_t u + \operatorname{div}_x(u \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

dove $\mathbf{V}(x, t)$ è la **velocità** del gas e $\varepsilon \in (0, 1)$ è la **porosità** del mezzo in cui avviene la diffusione. Osserviamo che, se \mathbf{V} fosse prescritta, la (1) sarebbe un'equazione di **puro trasporto**.

Secondo la **legge di Darcy**, in queste condizioni vale l'identità

$$\nu \mathbf{V} = -\lambda \nabla p, \quad (2)$$

dove ν è la viscosità del gas, λ è la permeabilità del mezzo e p è la pressione del gas.

Pensando a $u(x, t) \geq 0$ come alla **densità** del gas che si sta diffondendo, scriviamo anzitutto la relativa **equazione di continuità**:

$$\varepsilon \partial_t u + \operatorname{div}_x(u \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

dove $\mathbf{V}(x, t)$ è la **velocità** del gas e $\varepsilon \in (0, 1)$ è la **porosità** del mezzo in cui avviene la diffusione. Osserviamo che, se \mathbf{V} fosse prescritta, la (1) sarebbe un'equazione di **puro trasporto**.

Secondo la **legge di Darcy**, in queste condizioni vale l'identità

$$\nu \mathbf{V} = -\lambda \nabla p, \quad (2)$$

dove ν è la viscosità del gas, λ è la permeabilità del mezzo e p è la pressione del gas. Infine, si ipotizza che sussista la seguente **relazione politropica** tra densità e pressione:

$$p = p_0 u^\eta, \quad (3)$$

dove p_0 è la pressione di riferimento e $\eta \geq 1$ è l'esponente politropico.

Sostituendo (2) e (3) nella (1) ricaviamo

$$\partial_t u - \frac{\lambda \rho_0}{\nu \varepsilon} \operatorname{div}_x [u \nabla_x (u^\eta)] = 0,$$

ovvero, ponendo $m = \eta + 1$, portando a destra la divergenza e trascurando le costanti moltiplicative,

$$\partial_t u = \operatorname{div}_x \left(m u^{m-1} \nabla_x u \right) = \Delta_x (u^m). \quad (4)$$

Sostituendo (2) e (3) nella (1) ricaviamo

$$\partial_t u - \frac{\lambda \rho_0}{\nu \varepsilon} \operatorname{div}_x [u \nabla_x (u^\eta)] = 0,$$

ovvero, ponendo $m = \eta + 1$, portando a destra la divergenza e trascurando le costanti moltiplicative,

$$\partial_t u = \operatorname{div}_x \left(m u^{m-1} \nabla_x u \right) = \Delta_x (u^m). \quad (4)$$

La (4) è quella nota in letteratura, a tutti gli effetti, come [equazione dei mezzi porosi](#), che viene studiata in generale per ogni $m > 1$.

Al di là del modello gassoso specifico per cui è stata originariamente ricavata, ha trovato molte altre applicazioni, tra le quali: propagazione del calore in plasma (modello di Zel'dovich-Raizer), infiltrazioni di acque sotterranee (equazione di Boussinesq), dinamica evolutiva di specie (modello di Gurtin-McCamy), etc. . .

Le soluzioni speciali “Barenblatt”

Ciò che caratterizza la (4) è il carattere **non-lineare** e **degenere** della diffusione. Infatti, il coefficiente di diffusione è

$$c = m u^{m-1},$$

in particolare risulta **identicamente nullo** laddove $u = 0$! Ci aspettiamo quindi che velocità di diffusione e regolarizzazione siano più delicate da studiare rispetto all'equazione del calore.

Le soluzioni speciali “Barenblatt”

Ciò che caratterizza la (4) è il carattere **non-lineare** e **degenere** della diffusione. Infatti, il coefficiente di diffusione è

$$c = m u^{m-1},$$

in particolare risulta **identicamente nullo** laddove $u = 0$! Ci aspettiamo quindi che velocità di diffusione e regolarizzazione siano più delicate da studiare rispetto all'equazione del calore.

Fortunatamente, esiste una classe di **soluzioni speciali esplicite**:

$$B_m(x, t) = t^{-\frac{n}{2+n(m-1)}} \left(C - \frac{m-1}{2m[2+n(m-1)]} |x|^2 t^{-\frac{2}{2+n(m-1)}} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

note in letteratura come **soluzioni Barenblatt**, nome derivante dal matematico russo Grigory Barenblatt, che fu tra i primi a individuarle.

Tali soluzioni mettono in luce alcune proprietà cruciali dell'equazione dei mezzi porosi, che la differenziano da quella del calore:

Tali soluzioni mettono in luce alcune proprietà cruciali dell'equazione dei mezzi porosi, che la differenziano da quella del calore:

- **supporto compatto** e **velocità di propagazione finita**: ad ogni $t > 0$ abbiamo che l'insieme di positività di $B_m(x, t)$ è una palla di raggio

$$R(t) = K_{m,n,C} t^{\frac{1}{2+n(m-1)}} ;$$

Tali soluzioni mettono in luce alcune proprietà cruciali dell'equazione dei mezzi porosi, che la differenziano da quella del calore:

- **supporto compatto** e **velocità di propagazione finita**: ad ogni $t > 0$ abbiamo che l'insieme di positività di $B_m(x, t)$ è una palla di raggio

$$R(t) = K_{m,n,C} t^{\frac{1}{2+n(m-1)}};$$

- la **regolarità** è, in generale, al più **Hölderiana** se $m > 2$: vicino a $|x| = R(t)$ notiamo che $B_m(x, t)$ si comporta come

$$B_m(x, t) \sim \left[R(t) - |x| \right]_+^{\frac{1}{m-1}}.$$

Tali soluzioni mettono in luce alcune proprietà cruciali dell'equazione dei mezzi porosi, che la differenziano da quella del calore:

- **supporto compatto** e **velocità di propagazione finita**: ad ogni $t > 0$ abbiamo che l'insieme di positività di $B_m(x, t)$ è una palla di raggio

$$R(t) = K_{m,n,C} t^{\frac{1}{2+n(m-1)}};$$

- la **regolarità** è, in generale, al più **Hölderiana** se $m > 2$: vicino a $|x|=R(t)$ notiamo che $B_m(x, t)$ si comporta come

$$B_m(x, t) \sim \left[R(t) - |x| \right]_+^{\frac{1}{m-1}}.$$

Un altro aspetto interessante delle soluzioni Barenblatt è che agiscono come “soluzioni fondamentali”: infatti, si può dimostrare che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} B_m(x, t) = M \delta_0(x) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

È facile verificare che la **massa totale** $M = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{B}_m(x, t) dx$ è conservata nel tempo ed è uguale a

$$M = \kappa_{m,n} \mathbf{C}^{\frac{2+n(m-1)}{2(m-1)}} \Leftrightarrow \mathbf{C} = M^{\frac{2(m-1)}{2+n(m-1)}} \kappa_{m,n}^{-\frac{2(m-1)}{2+n(m-1)}} .$$

Per semplicità di calcolo, d'ora in poi supporremo $\kappa_{m,n} = 1$.

È facile verificare che la **massa totale** $M = \int_{\mathbb{R}^n} B_m(x, t) dx$ è conservata nel tempo ed è uguale a

$$M = \kappa_{m,n} C^{\frac{2+n(m-1)}{2(m-1)}} \quad \Leftrightarrow \quad C = M^{\frac{2(m-1)}{2+n(m-1)}} \kappa_{m,n}^{-\frac{2(m-1)}{2+n(m-1)}} .$$

Per semplicità di calcolo, d'ora in poi supporremo $\kappa_{m,n} = 1$.

Come visto, ci sono differenze importanti tra l'equazione dei mezzi porosi e quella del calore. Tuttavia, per $m \rightarrow 1^+$, ci aspettiamo che tali differenze si riducano sempre di più. Ciò risulta evidente se facciamo il limite per $m \rightarrow 1^+$ delle soluzioni Barenblatt a **massa costante**:

È facile verificare che la **massa totale** $M = \int_{\mathbb{R}^n} B_m(x, t) dx$ è conservata nel tempo ed è uguale a

$$M = \kappa_{m,n} C^{\frac{2+n(m-1)}{2(m-1)}} \Leftrightarrow C = M^{\frac{2(m-1)}{2+n(m-1)}} \kappa_{m,n}^{-\frac{2(m-1)}{2+n(m-1)}}.$$

Per semplicità di calcolo, d'ora in poi supporremo $\kappa_{m,n} = 1$.

Come visto, ci sono differenze importanti tra l'equazione dei mezzi porosi e quella del calore. Tuttavia, per $m \rightarrow 1^+$, ci aspettiamo che tali differenze si riducano sempre di più. Ciò risulta evidente se facciamo il limite per $m \rightarrow 1^+$ delle soluzioni Barenblatt a **massa costante**:

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow 1^+} t^{-\frac{n}{2+n(m-1)}} \left(M^{\frac{2(m-1)}{2+n(m-1)}} - \frac{m-1}{2m[2+n(m-1)]} |x|^2 t^{-\frac{2}{2+n(m-1)}} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ &= \lim_{m \rightarrow 1^+} M^{\frac{2}{2+n(m-1)}} t^{-\frac{n}{2+n(m-1)}} \left[1 - \frac{M^{-\frac{2(m-1)}{2+n(m-1)}}}{2m[2+n(m-1)]} |x|^2 t^{-\frac{2}{2+n(m-1)}} (m-1) \right]^{\frac{1}{m-1}} \\ &= M t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = M K(x, 0, t). \end{aligned}$$

a meno di $(4\pi)^{-n/2}$

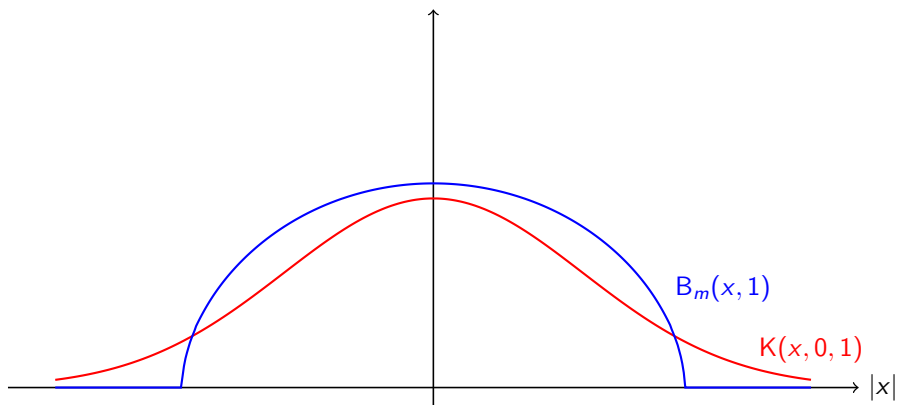


Figura: Confronto grafico tra il profilo (a tempo fissato) del nucleo del calore centrato in $y = 0$ [rosso] e quello di una soluzione di tipo Barenblatt [blu].

Una possibile formulazione debole

Il fatto che le soluzioni, in generale, **non sono classiche**, rende fondamentale l'introduzione di un'opportuna **formulazione debole** dell'equazione.

Una possibile formulazione debole

Il fatto che le soluzioni, in generale, **non sono classiche**, rende fondamentale l'introduzione di un'opportuna **formulazione debole** dell'equazione. A questo scopo, come di consueto moltiplichiamo per un'arbitraria funzione test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ e integriamo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \partial_t u \varphi \, dt dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x(u^m) \varphi \, dx dt .$$

Una possibile formulazione debole

Il fatto che le soluzioni, in generale, **non sono classiche**, rende fondamentale l'introduzione di un'opportuna **formulazione debole** dell'equazione. A questo scopo, come di consueto moltiplichiamo per un'arbitraria funzione test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ e integriamo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \partial_t u \varphi \, dt dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x(u^m) \varphi \, dx dt .$$

Integrando **per parti** ambo i membri (il primo in tempo e il secondo in spazio usando il teorema della divergenza), otteniamo:

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} u \partial_t \varphi \, dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \varphi(x, 0) \, dx = -\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x(u^m) \cdot \nabla_x \varphi \, dx dt . \quad (5)$$

Una possibile formulazione debole

Il fatto che le soluzioni, in generale, **non sono classiche**, rende fondamentale l'introduzione di un'opportuna **formulazione debole** dell'equazione. A questo scopo, come di consueto moltiplichiamo per un'arbitraria funzione test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ e integriamo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \partial_t u \varphi \, dt dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x(u^m) \varphi \, dx dt .$$

Integrando **per parti** ambo i membri (il primo in tempo e il secondo in spazio usando il teorema della divergenza), otteniamo:

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} u \partial_t \varphi \, dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \varphi(x, 0) \, dx = -\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x(u^m) \cdot \nabla_x \varphi \, dx dt . \quad (5)$$

Le soluzioni Barenblatt soddisfano l'equazione dei mezzi porosi nel senso della (5) ma **non in senso classico!**

Un effetto regolarizzante non-lineare

Nonostante l'equazione sia non-lineare, e in particolare **non** sia disponibile una **formula di rappresentazione** per le soluzioni, si può dimostrare che continua a valere un **effetto regolarizzante** $L^1 - L^\infty$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_{m,n} t^{-\frac{n}{2+n(m-1)}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{2+n(m-1)}} \quad \forall t > 0, \quad (6)$$

per un'opportuna costante $C_{m,n} > 0$.

Un effetto regolarizzante non-lineare

Nonostante l'equazione sia non-lineare, e in particolare **non** sia disponibile una **formula di rappresentazione** per le soluzioni, si può dimostrare che continua a valere un **effetto regolarizzante** $L^1 - L^\infty$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_{m,n} t^{-\frac{n}{2+n(m-1)}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{2+n(m-1)}} \quad \forall t > 0, \quad (6)$$

per un'opportuna costante $C_{m,n} > 0$.

Alcune osservazioni, prima di vedere un'idea di dimostrazione:

Un effetto regolarizzante non-lineare

Nonostante l'equazione sia non-lineare, e in particolare **non** sia disponibile una **formula di rappresentazione** per le soluzioni, si può dimostrare che continua a valere un **effetto regolarizzante** $L^1 - L^\infty$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_{m,n} t^{-\frac{n}{2+n(m-1)}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{2+n(m-1)}} \quad \forall t > 0, \quad (6)$$

per un'opportuna costante $C_{m,n} > 0$.

Alcune osservazioni, prima di vedere un'idea di dimostrazione:

- le soluzioni Barenblatt **saturano** la stima, nel senso che i due membri della (6) si comportano allo stesso modo rispetto a t se valutati su $u = B_m$;

Un effetto regolarizzante non-lineare

Nonostante l'equazione sia non-lineare, e in particolare **non** sia disponibile una **formula di rappresentazione** per le soluzioni, si può dimostrare che continua a valere un **effetto regolarizzante** $L^1 - L^\infty$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_{m,n} t^{-\frac{n}{2+n(m-1)}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{2+n(m-1)}} \quad \forall t > 0, \quad (6)$$

per un'opportuna costante $C_{m,n} > 0$.

Alcune osservazioni, prima di vedere un'idea di dimostrazione:

- le soluzioni Barenblatt **saturano** la stima, nel senso che i due membri della (6) si comportano allo stesso modo rispetto a t se valutati su $u = B_m$;
- per $m = 1$ otteniamo esattamente l'effetto regolarizzante relativo all'**equazione del calore**; sorprendentemente, la regolarizzazione è migliore per $m > 1$ rispetto a $m = 1$, poiché

$$\frac{n}{2+n(m-1)} < \frac{n}{2}.$$

Cenni di dimostrazione: l'iterazione di Moser

Dato un generico esponente $p > 1$, utilizzando l'equazione e integrando per parti, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u^{p-1} \partial_t u dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^{p-1} \Delta_x (u^m) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x (u^{p-1}) \cdot \nabla_x (u^m) dx \\ &= - (p-1)m \int_{\mathbb{R}^n} u^{p+m-3} |\nabla_x u|^2 dx \\ &= - \frac{4(p-1)m}{(p+m-1)^2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_x \left(u^{\frac{p+m-1}{2}} \right) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Cenni di dimostrazione: l'iterazione di Moser

Dato un generico esponente $p > 1$, utilizzando l'equazione e integrando per parti, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u^{p-1} \partial_t u dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^{p-1} \Delta_x (u^m) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x (u^{p-1}) \cdot \nabla_x (u^m) dx \\ &= - (p-1)m \int_{\mathbb{R}^n} u^{p+m-3} |\nabla_x u|^2 dx \\ &= - \frac{4(p-1)m}{(p+m-1)^2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_x \left(u^{\frac{p+m-1}{2}} \right) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Ora fissiamo due tempi arbitrari $t_1 > t_0 > 0$. Integrando la precedente identità in (t_0, t_1) e moltiplicando per p , ricaviamo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^p(x, t_1) dx + \frac{4(p-1)pm}{(p+m-1)^2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_x \left(u^{\frac{p+m-1}{2}} \right) \right|^2 dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} u^p(x, t_0) dx. \quad (7)$$

Anzitutto, deduciamo che $t \mapsto \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ decresce.

¹ Si può dimostrare che $\|f\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \leq Q_n \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ per un'opportuna costante $Q_n > 0$, dove $n \geq 3$ e $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

Anzitutto, deduciamo che $t \mapsto \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ **decrece**. Applicando la **disuguaglianza di Sobolev**¹ alla funzione $f = u^{\frac{p+m-1}{2}}$, abbiamo la stima

$$\begin{aligned}(t_1 - t_0) \|u(t_1)\|_{L^{\frac{2^*(p+m-1)}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{p+m-1} &\leq \int_{t_0}^{t_1} \left\| u^{\frac{p+m-1}{2}}(t) \right\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \\ &\leq Q_n^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_x \left(u^{\frac{p+m-1}{2}} \right) \right|^2 dx dt.\end{aligned}$$

¹ Si può dimostrare che $\|f\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \leq Q_n \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ per un'opportuna costante $Q_n > 0$, dove $n \geq 3$ e $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

Anzitutto, deduciamo che $t \mapsto \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ **decrece**. Applicando la **disuguaglianza di Sobolev**¹ alla funzione $f = u^{\frac{p+m-1}{2}}$, abbiamo la stima

$$\begin{aligned} (t_1 - t_0) \|u(t_1)\|_{L^{\frac{2^*(p+m-1)}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{p+m-1} &\leq \int_{t_0}^{t_1} \left\| u^{\frac{p+m-1}{2}}(t) \right\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \\ &\leq Q_n^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_x \left(u^{\frac{p+m-1}{2}} \right) \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (7) e ignorando $\|u(t_1)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p$ otteniamo

$$\frac{4(p-1)pm}{Q_n^2(p+m-1)^2} (t_1 - t_0) \|u(t_1)\|_{L^{\frac{2^*(p+m-1)}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{p+m-1} \leq \|u(t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p, \quad (8)$$

ovvero un **guadagno d'integrabilità** a un tempo successivo.

¹ Si può dimostrare che $\|f\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \leq Q_n \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ per un'opportuna costante $Q_n > 0$, dove $n \geq 3$ e $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

Anzitutto, deduciamo che $t \mapsto \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ **decrece**. Applicando la **disuguaglianza di Sobolev**¹ alla funzione $f = u^{\frac{p+m-1}{2}}$, abbiamo la stima

$$\begin{aligned} (t_1 - t_0) \|u(t_1)\|_{L^{\frac{2^*(p+m-1)}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{p+m-1} &\leq \int_{t_0}^{t_1} \left\| u^{\frac{p+m-1}{2}}(t) \right\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \\ &\leq Q_n^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_x \left(u^{\frac{p+m-1}{2}} \right) \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (7) e ignorando $\|u(t_1)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p$ otteniamo

$$\frac{4(p-1)pm}{Q_n^2(p+m-1)^2} (t_1 - t_0) \|u(t_1)\|_{L^{\frac{2^*(p+m-1)}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{p+m-1} \leq \|u(t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p, \quad (8)$$

ovvero un **guadagno d'integrabilità** a un tempo successivo. Sfruttando opportunamente la (8) è possibile arrivare all'effetto regolarizzante (6), mediante una tecnica ricorsiva nota come **iterazione di Moser** (dal matematico tedesco Jürgen Moser).

¹ Si può dimostrare che $\|f\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \leq Q_n \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ per un'opportuna costante $Q_n > 0$, dove $n \geq 3$ e $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

Alcune referenze bibliografiche

I seguenti due libri sono stati scritti da Juan Luis Vázquez (Professore Emerito presso l'Universidad Autónoma de Madrid), uno dei massimi esperti di diffusione non-lineare:

- *The Porous Medium Equation. Mathematical Theory*
Oxford University Press, 2007
- *Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations. Equations of Porous Medium Type*
Oxford University Press, 2006

Alcune referenze bibliografiche

I seguenti due libri sono stati scritti da Juan Luis Vázquez (Professore Emerito presso l'Universidad Autónoma de Madrid), uno dei massimi esperti di diffusione non-lineare:

- *The Porous Medium Equation. Mathematical Theory*
Oxford University Press, 2007
- *Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations. Equations of Porous Medium Type*
Oxford University Press, 2006

Molte delle tematiche discusse oggi si possono anche trovare, elaborate in dettaglio, nella mia tesi di dottorato:

- *Weighted Functional Inequalities and Nonlinear Diffusions of Porous Medium Type*

consultabile nell'archivio POLITesi o scaricabile al seguente link:

<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01289874>