Compiti di Metodi Matematici per l'Ingegneria
a.a. 2021/2022. Politecnico di Milano
Settimana 2
Prof. M. Bramanti

Riferimenti di studio per la settimana 2:
Libro di testo:
cap.1, §1.2 (tranne §1.2.3)
cap.6, §6.1.1., 6.1.2, 6.1.3, 6.2, 6.3.1.3, 6.3.2 (solo cenni)
Scaricare dalla pagina web del corso la *dispensa integrativa sulle funzioni a variabile complessa*, e studiare i paragrafi sopra indicati del libro di testo seguendo il filo logico dei § 1, 2, 3 della dispensa.

Approfondimenti fuori programma, per chi è interessato:
cap.6, §6.3.1 (altri significati fisici delle funzioni olomorfe).

Svolgere i seguenti esercizi dal libro di testo:
Capitolo 1: Esercizio 1.29.

Rispondere alle seguenti domande di riepilogo sul Cap.1 (che abbiamo terminato).

1. Si dia la definizione di spazio metrico, successione di Cauchy, spazio metrico completo, spazio vettoriale normato, spazio di Banach. Si facciano esempi di *spazi di funzioni* con le seguenti caratteristiche:
-uno spazio vettoriale normato e uno spazio vettoriale che non ha una norma naturale;
-uno spazio metrico che non è uno spazio vettoriale;
-uno spazio vettoriale normato completo e uno non completo.
Si dia un esempio (se tale esempio esiste!) di:
-uno spazio vettoriale (di funzioni) e un suo sottoinsieme che non è uno spazio vettoriale;
-uno spazio metrico (di funzioni) e un suo sottoinsieme che non è uno spazio metrico.
Nota: tutti gli esempi richiesti devono consistere di *spazi di funzioni*, non spazi di dimensione finita.

2. Vero o falso?
a. Gli spazi vettoriali normati sono particolari spazi metrici.
b. Gli spazi metrici sono tutti spazi vettoriali, ma non sempre normati.
c. Ogni sottoinsieme di uno spazio metrico è metrico.
d. Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale normato è uno spazio vettoriale normato.
e. Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio di Banach è di Banach.

3. Fare un esempio di successione di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$ e...

a. f_n converge puntualmente ma non uniformemente.
b. f_n converge uniformemente.
c. f_n sono continue ma f è discontinua
d. f_n sono limitate ma f è illimitata
e. f_n sono derivabili ma f non è derivabile.

4. Fare due diversi esempi di norme che si possono introdurre in $C^0[a,b]$; fare tre diversi esempi di norme che si possono introdurre in $C^1[a,b]$. Per ogni norma proposta, dire se con quella norma lo spazio risulta completo.

5. Lo spazio $C^0(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale? Ha una norma naturale? Elencare i vari sottoinsiemi di questo spazio visti a lezione che risultano essere spazi vettoriali normati, e per ciascuno di essi dire se è completo oppure no.

6. Siano X uno spazio vettoriale normato e X_0 un suo sottospazio. Se trovo un esempio di successione $\{f_n\} \subset X_0$ tale che $f_n \to f \in X \setminus X_0$, questo fatto che cosa dimostra?

7. Sia X uno di Banach e X_0 un suo sottospazio vettoriale *chiuso*. Si può concludere che X_0 è completo?

Esercizi sui primi elementi della teoria delle funzioni di variabile complessa

1. Si considerino le funzioni di variabili complessa:

$$f(z) = ze^{\overline{z}}; g(z) = z^4; h(z) = \frac{1}{z^2}.$$

a. Per ciascuna di queste, riscriverla nella forma $u(x,y) + iv(x,y)$ con u, v a valori reali.

b. Quindi verificare in ciascun caso se sono soddisfatte oppure no le condizioni di Cauchy-Riemann (per $h(z)$, per $z \neq 0$).

c. In ciascun caso, verificare se la funzione $u(x,y)$ è armonica oppure no. Commentare alla luce della teoria studiata.

2. Svolgere l'**Esercizio 6.5.**

3. Si consideri la **Proposizione 6.15 p.256**. A lezione si sono dimostrate le prime due identità. Dimostrare le altre 3 (parte reale e immaginaria di $\sin z, \mathrm{Ch}\, z, \mathrm{Sh} z$, e ricavare da queste le espressioni semplici per il modulo della funzione.

4. Utilizzare le identità della proposizione 6.15 per verificare che le trascendenti elementari soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann in tutto il piano complesso.

5. Verificare le condizioni di Cauchy-Riemann per la funzione z^4.