

Compiti di Metodi Matematici per l'Ingegneria

a.a. 2021/2022. Politecnico di Milano

Settimana 5

Prof. M. Bramanti

Riferimenti di studio per la settimana 5:

Dispensa integrativa sulle funzioni olomorfe, §5, con rimandi al Libro di testo: cap.6, §6.6.2, 6.6.3, 6.6.4 (tutto senza fare uso delle serie bilatere), §6.7.1., 6.7.2.1.

Si raccomanda di scaricare dalla pagina web del corso la versione aggiornata (12/10/21) della dispensa integrativa sulle funzioni olomorfe

Svolgere i seguenti esercizi dal libro di testo:

Sulla classificazione delle singolarità di una funzione: Svolgere almeno 5 degli Esercizi 6.37-6.52 (senza sviluppo di Laurent)

Sul calcolo degli integrali in \mathbb{C} col metodo dei residui: Esercizi 6.53-6.56

Sul calcolo degli integrali in \mathbb{R} col metodo dei residui: Esercizi 6.58-6.61

Svolgere inoltre i seguenti esercizi, tratti da temi d'esame recenti:

Esercizio.

(a) Determinare le singolarità della funzione olomorfa

$$f(z) = \frac{e^{iz} - 1}{(z^3 + 4z)^2},$$

e classificare le singolarità, giustificando le affermazioni.

(b) Calcolare quindi l'integrale nel campo complesso

$$\int_{\gamma_2(i)} f(z) dz,$$

dove $\gamma_2(i)$ rappresenta la circonferenza di centro i e raggio 2 percorsa in verso antiorario.

(aggiunta):

(c) Calcolare poi l'integrale

$$\int_{\gamma_1(2i)} f(z) dz$$

senza usare il metodo dei residui.

Esercizio. Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo in ogni eventuale polo.

$$f(z) = \frac{(\cos z - 1) e^{\frac{1}{z+i}}}{z^3} + \frac{z^2}{(z^2 + i)^2}.$$

Esercizio. Calcolare il seguente integrale nel campo complesso, giustificando il procedimento seguito:

$$\int_{\gamma_2^+(0)} \bar{z} (\bar{z} + z^3) dz$$

dove $\gamma_2^+(0)$ denota la semicirconfenza di centro 0 e raggio 2 posta nel semipiano $\text{Im } z > 0$ e percorsa in verso antiorario.

Esercizio. (2018, Itinere 1) Classificare le singolarità della seguente funzione, e calcolare il residuo negli eventuali poli del prim'ordine.

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z+2}} (e^z - 1)}{(z^2 + 1)^2 \sin(i\pi z)}.$$

Esercizio. Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo negli eventuali poli del prim'ordine.

$$f(z) = \frac{\sin(z+3) \sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{(z^3 + 27)^2}.$$

Esercizio. Classificare le singolarità della seguente funzione, e calcolare il residuo negli eventuali poli del prim'ordine e singolarità essenziali.

$$f(z) = \frac{(e^{z^2-1} - 1)}{\sin^2(\pi z)} e^{1/z^2}.$$

Dalla pagina web del corso è possibile scaricare il **programma dettagliato** della prima metà del corso, cioè della prima prova in itinere (l'ultimo argomento sarà svolto la settimana prossima, comunque il programma in rete è già completo), il file con l'elenco degli **argomenti degli esercizi** della prima prova in itinere, e il pdf con le **domande teoriche-tipo sulla prima metà del corso (cioè della prima prova in itinere)**. Le domande teoriche che compariranno nella prova in itinere saranno scelte tra queste (o loro piccole variazioni).